МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СФЕРЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ШАХТЫ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
(ИСОиП (филиал) ДГТУ в г. Шахты)

Теория систем и системный анализ

Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы
для обучающихся направления
090303 «Прикладная информатика»
всех форм обучения

Составитель О.И. Охрименко

Шахты
ИСОиП (филиал) ДГТУ в г. Шахты
2019

Составитель:

к.э.н., доц. кафедры «Математика и прикладная информатика»

Охрименко О.И.

В настоящем учебно-методическом пособии приводятся темы для практических занятий, самостоятельной работы, задания для текущего и промежуточного контроля, вопросы к контрольным точкам, к зачету. Раскрыт порядок организации самостоятельной работы студентов и контроль за ходом ее выполнения. Предназначено для оказания методической помощи в овладении учебной дисциплиной для обучения по направлению 090303 «Прикладная информатика».

Режим доступа к электронной копии печатного издания http://www.libdb.sssu.ru

Учебно-методическое пособие публикуются в авторской редакции. Ответственность за аутентичность цитат, проводимых имен и дат, а также за точность употребительной терминологии несут сами авторы.

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для оказания методической помощи обучающимся при изучении дисциплины «Теория систем и системный анализ». Основная цель учебно-методического пособия: в доступной форме познакомить обучающихся с идеями и математическим аппаратом теории систем, основными этапами, принципами и методами системного анализа; развить у них навыки по применению методов системного анализа, а также современных методов обработки экспериментальных данных на практике. В пособии представлены необходимые сведения из теории систем и системного анализа, теории массового обслуживания, теории графов, теории принятия решений.

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Теория систем и системный анализ» является составной частью системы дисциплин в процессе подготовки бакалавров по направлению 090303 Прикладная информатика.

Целями освоения учебной дисциплины «Теория систем и системный анализ» являются:

– освоение обучающимися теоретических, методических и практических разделов теории систем и системного анализа, необходимых для понимания основ возможных приложений изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной деятельности;

– формирование культуры мышления, способности к логическому обобщению, анализу и восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

– освоения качественных и численных методов описания и конструирования модельных задач теории систем, применяемых в будущей практической деятельности студента.

При решении задач и выполнении заданий обучающиеся используют лекции преподавателя, обязательную и дополнительную учебную литературу.

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Раздел 1. Качественные методы теории систем и системного анализа

1.1 Понятие системы. Классификация систем.

1.2 Системный анализ: сущность системного анализа, микро- и макроподходы, задачи описания и конструирования данных.

1.3 Методы решения задач качественного и количественного описания данных системы.

Раздел 2. Этапы системного анализа

2.1 Этапы системного анализа, постановка многокритериальных задач.

2.2 Способы решения многокритериальных задач.

1.5 Основные характеристики графов .

1.6 Методы решения задач качественного и количественного описания данных системы.

1.7 Алгоритм Форда-Беллмана

Раздел 3. Основы теории принятия решений

3.1 Введение в теорию принятия решений /Ср/

3.2 Простые лотереи. Критерии принятия решений /Пр/

3.3 Простые лотереи. Критерии принятия решений /Ср/

3.4 Принятие решений в детерминированных условиях. обзор методов /Ср/

3.5 Принятие решений в условиях риска /Пр/

3.6 Принятие решений в условиях риска /Ср/

3.7 Принятие решений в условиях неопределенности /Ср/

3.8 Введение в имитационное моделирование /Пр/

3.9 Введение в имитационное моделирование /Ср/

3.10 Моделирование систем массового обслуживания /Ср/

ТЕМАТИКА ЛЕКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Тема 1. Понятие системы. Классификация систем

Тема 2. Системный анализ: сущность системного анализа, микро- и макроподходы, задачи описания и конструирования данных

Тема 3. Методы решения задач качественного и количественного описания данных системы

Тема 4. Этапы системного анализа, постановка многокритериальных задач

Тема 5. Способы решения многокритериальных задач

Тема 6. Основные характеристики графов, матричные способы задания, маршруты и циклы, связность и достижимость

Тема 7. Алгоритм Форда-Беллмана нахождения минимального пути

Тема 8. Введение в теорию принятия решений: предпочтения, аксиомы принятия решений, функция полезности

Тема 9. Принятие решений в детерминированных условиях. Обзор методов

Тема 10. Принятие решений в условиях риска

Тема 11. Принятие решений в условиях неопределенности.

Тема 12. Введение в имитационное моделирование

Тема 13. Моделирование систем массового обслуживания

Тема 1. Понятие системы. Классификация систем

Среди современных научных дисциплин видное место занимает **общая теория систем**. Развитие этой науки показало, что понятие общая теория систем не имеет строгого определенного смысла; в этой связи в научный инструментарий вошли такие понятия, как «***системный подход***», «***системное исследование***», «***системный анализ***», «***исследование операций***».

Следует учесть, что термины системного исследования, употребляемые в разных науках, существенно различаются по своим формулировкам. Представим некоторые подходы к определению системы:

✓ система – это множество объектов вместе с отношениями между объектами и между их атрибутами (А. Холл и Р. Фейджин);

✓ система есть абстрактный (языковый) аналог реального объекта или явления (А.И. Берг);

✓ под целостной системой понимается совокупность компонентов, взаимодействие которых порождает новые (интегральные системные) качества, не присущие ее образующим (В.Г. Афанасьев).

Система – это совокупность (множество) элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство. При этом нужно учитывать, что:

– каждый элемент, входящий в систему, сам по себе может рассматриваться как система, состоящая из элементов другого типа, т.е. системы обычно представляют собой иерархическую структуру;

– взаимосвязи между элементами системы могут меняться во времени в соответствии с ходом выполнения возложенных на эти элементы функций.

Система – целостный комплекс взаимосвязанных компонентов, имеющий особое единство с внешней средой и представляющий собой подсистему системы более высокого порядка (глобальной системы). Единство системы с внешней средой определяет ее взаимосвязь с действием объективных экономических законов.

Существуют и другие определения понятия системы, выделяющие его философскую, математическую, физическую, лингвистическую и другие стороны. Несмотря на такое многообразие формальных определений этого понятия, суть его состоит в том, что система должна рассматриваться как некий целостный комплекс взаимосвязанных элементов, объединенных общностью цели и образующих особое единство с окружающей средой.

Итак, в общем случае под системой понимается *наличие множества объектов исследования с набором связей между ними и между их свойствами*.

Любая система S есть совокупность вида:

$$S = \{M_0;\ R : o_k \rightarrow o_i; P_r(o_k), k, i = \overline{1,n}\}, \tag{1.1}$$

где o_k – элемент системы S;

M_0 – множество элементов;

R – отношение между элементами o_k и o_i. k, $i = \overline{1,n}$, входящими в систему S, или связь между элементами o_k и o_i;

$P_r(o_k)$ – свойство элемента o_k;

n – число элементов системы S.

При изучении системы предполагается что элементы o_k системы S функционируют во времени и в пространстве *как единое целое*, каждый элемент (подсистема, объект, ячейка) работают и обладают наследственными свойствами самой системы S.

Система обладает новыми интегральными качествами, которые отсутствуют у ее компонентов. Выделение системы из реального мира всегда субъективно. Любая система взаимодействует с окружающей ее средой – внешней средой.

Внешней средой называется все то, что не входит в систему и воздействует на нее. В экономических системах к внешней среде относятся: компоненты макросреды (страны), инфраструктуры региона, в котором находится система, и микросреды системы, с которыми она имеет прямые или косвенные связи.

Теория систем и системного анализа (ТССА), как отрасль науки, может быть разделена на две достаточно условные части:

– теоретическую, использующую такие отрасли, как теория вероятностей, теория информации, теория игр, теория графов, теория расписаний, теория решений, топология, факторный анализ и др.

– прикладную, основанную на прикладной математической статистике, методах исследования операций, системотехнике и т.п.

Т.о., ТССА широко использует достижения многих отраслей науки.

Вместе с тем в теории систем имеется свой особый метод – системный подход к возникающим задачам. Сущность этого метода достаточно проста: все элементы системы и все операции в ней должны рассматриваться только как одно целое, только в совокупности, только во взаимосвязи друг с другом.

Рассмотрим теперь вопрос о связях системы – между отдельными элементами подсистем, подсистемами разных уровней и связях с внешней средой. Связи эти производятся по каналам, которые наполнены в общем случае продукцией, деньгами и информацией.

Первый вопрос возникает о согласовании этих совершенно несопоставимых по размерностям показателей, ведь без этого не установить единый показатель эффективности системы в целом.

Второй вопрос заключается в стохастической, вероятностной природе этих наполнителей, а также внешней среды и действий человека, неизменно присутствующего в системе.

Поэтому при системном анализе часто приходится иметь дело не с конкретными значениями величин, не с заранее определенными событиями, а с их оценками по прошлым наблюдениям или по прогнозам на будущее. Отсюда возникает необходимость использования специальных, большей частью прикладных, методов математической статистики.

Рассмотрим **основные категории, раскрывающие сущность системы**.

Элемент – это предел деления экономической системы с точки зрения решения конкретной задачи в рамках поставленной цели.

Таким образом, элементы - это части или компоненты системы S, причем n – число таких частей – может быть как конечным, так и возможно $n \to \infty$.

Содержание системы – вещественный субстрат системы: совокупность людей, средств производства и предметов труда.

Вещество системы – предметы труда – все, что проходит обработку в системе.

Энергия системы – люди и орудия труда, новшества, информация собственная. Управление должно быть направлено на рациональное использование энергии.

Связь – это то, что объединяет отдельные элементы в систему. Связь есть ограничение степени свободы элементов. Связь обеспечивает возникновение и сохранение целостных свойств системы. Предполагается, что связи существуют между всеми элементами, между подсистемами и между любыми двумя системами S_1 и S_2.

Связи в системе управления выступают как отношения управления. Такие связи могут быть *вертикальными* (отношение линейного и функционального управления) и *горизонтальными* (связи между звеньями одного уровня – отношения координации).

Под ***функцией*** понимается характер отношения частей (элементов) к целому (системе). Например, отношение части к целому, когда часть служит сохранению и развитию целого.

Организация – комплекс свойств, характеризующих определенную упорядоченность элементов системы, и совокупности их взаимодействия. Организации присуща иерархия уровней.

Структура отражает наиболее устойчивые проявления упорядоченности отношений и связей между устойчиво выделенными элементами системы. Если *организация* может быть нестабильной, то в структуре она приобретает наиболее устоявшееся выражение. Такими структурами на предприятии являются производственная структура и организационная структура управления. Более подробно характеристика структуры экономических систем изложена в подразделе 1.3.

Организация системы находит свое проявление в двух формах: структуре системы (в статике) и процессе взаимодействия элементов системы (в динамике).

В процессе существования системы диалектические противоречия вызывают определенные изменения как внутри, так и вне ее, т.е. во внешней системе, в которую входит система. Это приводит к необходимости изменения (реорганизации) статики и динамики системы, которое осуществляется под воздействием управления.

Системы можно классифицировать по различным признакам. Рассмотрим основные из них.

1. По степени сложности все системы можно разделить на три класса:

– *простые динамические*;

– *сложные динамические*, различающиеся разветвленной структурой и большим разнообразием внутренних связей, но *поддающиеся описанию*;

– *очень сложные, не поддающиеся описанию.*

2. По степени неопределенности во взаимодействии между собой элементов все системы можно разделить на два класса:

– *детерминированные*, в которых все элементы взаимодействуют друг с другом точно определенным и предварительно описанным образом;

– *вероятностные*, в которых характер реакции элементов на возникающие ситуации можно описать лишь с той или иной степенью достоверности.

3. По признаку глобальности сферы принимаемых управленческих решений выделяют централизованные и распределенные системы.

В *централизованной системе* решения принимаются одним лицом (в одном центре) и охватывают объект управления в целом. Положительными чертами такого управления являются высший уровень планирования, координации и контроля деятельности. Однако рост сложности, масштабов объекта управления приводит к появлению:

- во-первых, ситуации, когда решения долго не принимаются по причине перегрузки лица или центра принятия решений;

- во-вторых, увеличению длительности «цикла управления» из-за отдаленности места принятия решений от места их исполнения. Это может вызывать асинергический эффект резкого снижения эффективности управления. Для снижения вероятности такого эффекта создают распределенные экономические системы.

Распределенная система характеризуется наличием ряда иерархически, функционально, структурно связанных центров принятия решений и/или ответственности в согласованных сферах управления деятельностью системы.

«Распределение» затрагивает: декомпозицию целей и функций; права на принятие решений и распоряжение ресурсами; определение сфер ответственности и др. «Распределение» дополняют процедурами предварительного согласования и отчетности.

Недостатками таких систем являются повышенные риски:

- нарушения целостности при «распределении»;
- конфликтов уровней и/или элементов системы.

В настоящее время большинство экономических систем распределенные.

4. По участию человека в принятии и реализации решений выделяют автоматические (без участия человека) и автоматизированные (с участием человека, чаще всего оператора) системы.

Применение *автоматических систем* ограничено объектами и процессами, которые могут быть описаны и в отношении которых можно заранее разработать модели. Они работают по жестким, заранее заданным алгоритмам. Такие системы также применяют для обеспечения безопасности управления и эффективности некоторых быстропротекающих процессов управления, часто при одновременном сохранении за менеджером задач наблюдения и контроля.

Если заранее описать, предсказать все ситуации невозможно, то участие человека в системе управления становится необходимым. Наибольшее распространение в настоящее время получили *автоматизированные системы управления (АСУ)* с распределением функций между человеком-оператором и техническими средствами, основными из которых могут быть признаны вычислительные машины. АСУ - это человеко-машинная (гуманистическая) система, совокупность элементов, алгоритмов и действий человека, обеспечивающая автоматизированный сбор и обработку информации, необходимой для оптимизации управления в различных сферах человеческой деятельности (ГОСТ 19675-74), а также разработку или выбор вариантов команд управления (действий по достижению желаемого результата), передачу и исполнение команд управления.

По степени автоматизации выделяют экономические системы высокой степени автоматизации, средней и низкой. При исследованиях необходимо учитывать, что наблюдается тенденция повышения степени автоматизации операций менеджера от 10% (слабая автоматизация) до 10-40% (средняя степень автоматизации) и далее до 40-70% (высокая степень автоматизации). Как правило, в АСУ предусматривается и обеспечивается приоритет исполнения команд человека по отношению к командам, вырабатываемым автоматически.

5. По принципу управления, используемому в системе, выделяют системы программного, адаптивного, ситуационного, социально-этического управления.

При программном управлении система выдает управляющие воздействия в соответствии в заложенной в нее заранее программой вне зависимости от складывающейся ситуации. Например, при таком управлении ценообразованием цена товара остается постоянной независимо от уровня спроса.

При адаптивном управлении сигналы вырабатывают в зависимости от уровня определенного «отклика», являющегося «обратной связью». Например, если спрос на товар растет, то при адаптивном управлении цена может быть повышена, а при падении спроса - понижена (с учетом эластичности спроса). Гибкость системы управления предусматривает не только ее адаптацию, но и живучесть.

При ситуационном управлении решения и управляющие воздействия основываются на анализе вариантов с учетом: текущего состояния (например, того же спроса, запаса товара), располагаемых вариантов действий (например: повысить, понизить, не изменять цену), прогноза последствий (например, товар закончится быстрей, чем будет изготовлена и поступит новая партия, или имеются избыточные запасы, затоваривание). При этом открывается возможность учесть особенности конкурентной ситуации.

Принципы социально-этического управления позволяют исключить недопустимое воздействие на нецелевые элементы внешней среды, третьих лиц и др.

6. По признаку охвата ряда смежных областей деятельности выделяют *неинтегрированные (простые)* и *интегрированные* экономические системы.

Интегрированные системы управления объединяют и автоматизируют деятельность в нескольких сферах. Например, известны интегрированные системы проектирования и технологической подготовки объектов машиностроения. Такая интеграция не есть механическое объединение двух различных систем. Интеграция двух и более АСУ подразумевает возникновение на базе этих систем новой системы, имеющей свои цели и функции. В системе управления ценой интеграция позволит учитывать в цене стоимость разработки, производства и продвижения товара.

7. С точки зрения **возможности выработки в процессе управления новых знаний** можно выделить ординарные и интеллектуальные экономические системы.

Ординарные системы не создают новых знаний.

Интеллектуальные системы позволяют вырабатывать и использовать новую информацию для повышения эффективности и снижения рисков управления.

Творчество позволяет синтезировать в таких системах новые знания на базе композиции известных. Фундаментальная научная основа интеллектуальных АСУ - обеспечение и использование в различных вариантах и композициях существующих знаний для получения таким образом новых знаний, распространения этих знаний на новые области или на более длительный период времени.

8. По признаку рефлекторности. При исследовании экономических систем необходимо учитывать, относится ли эта система к рефлекторным или не относится.

Известно, что *рефлекторная* система управления откликается на конкретное внешнее воздействие вполне определенным образом. Термин «рефлекторность» подчеркивает аналогию с рефлексами, существующими у любого организма. Они являются результатом длительного процесса обучения и эволюции. Известно, что в классической теории управления исследуют только рефлекторные системы управления.

Частным случаем рефлекторности является изотонность отображения внешних воздействий. *Изотонным* называют такое отображение внешнего воздействия системой, ее конструкцией, при котором большему воздействию соответствует большая ответная реакция.

Предположение о рефлекторном характере системы управления позволяет прогнозировать реакции в процессе исследований, поэтому в процессе исследований необходимо:

1)установить пределы рефлекторности реакций;

2) подтвердить или отвергнуть гипотезу о рефлекторном поведении объекта исследования в конкретных условиях.

Соответственно, *нерефлекторной* будет система, которая может неоднозначно, многовариантно реагировать на одно и то же внешнее воздействие. Нерефлекторность систем управления возникает при:

1) потере стойкости системы или прочности элементов;

2) повреждениях, поражениях, отказах одного или ряда элементов;

3) сильном стрессе человека, являющегося элементом системы управления.

Факт участия индивидуума в управлении делает автоматизированную систему управления нерефлекторной в определенных ситуациях. Это связано с многовариантностью действий человека, особенно трудно прогнозировать поведение индивидуума в ситуации риска, неизбежного выбора, сильного стресса. Одним из основных элементов теории нерефлекторных систем считают необходимость более полного учета особенностей субъектов управления, будь то отдельный индивидуум, социальная группа или общественный класс.

Возможны и другие виды экономических систем, их многообразие растет и отражает усложнение экономических отношений. Особенности этих систем, отраженные при их классификации, могут играть решающую роль в выборе методов исследования экономических систем и определять достоверность результата, эффективность и затраты на такие исследования.

Тема 2. Системный анализ: сущность системного анализа, микро- и макроподходы, задачи описания и конструирования данных

Системный анализ – методология исследования труднонаблюдаемых и труднопонимаемых свойств и отношений в объектах с помощью представления этих объектов в качестве целенаправленных систем и изучение свойств этих систем, взаимоотношений между целями и средствами их реализации.

Область системного анализа достаточно широка и включает большое разнообразие постановок задач и множество методов их решения. Она лежит на стыке целого ряда отраслей науки и сфер человеческой деятельности: экономики, политики, военного дела, космических и геофизических исследований и др.

Системный анализ был разработан в 60-е годы в США по заданию военных ведомств. Применяется системный анализ для решения таких проблем, которые не могут быть поставлены и решены отдельными методами математики (т.е. проблем с неопределенностью ситуации принятия решения):

– использует не только формальные методы, но и методы качественного анализа («формализованный здравый смысл»), т.е. методы, направленные на активизацию использования интуиции и опыта специалистов;

– объединяет разные методы с помощью единой методики;

– опирается на научное мировоззрение;

– дает возможность объединить знания, суждения и интуицию специалистов различных областей знаний и обязывает их к определенной дисциплине мышления;

– основное внимание уделяет целям и целеобразованию.

Области приложения системного анализа можно определить с точки зрения ***характера*** решаемых задач:

✓ задачи, связанные с ***целеобразованием*** и анализом целей и функций (т.е. задачи определения основных направлений развития отрасли, предприятий; формирование прогнозов и перспективных планов общегосударственной программы развития экономики и т.п.);

✓ задачи разработки или совершенствования ***структур*** (структур отраслей промышленности, предприятий, объединений и других организаций);

✓ задачи ***проектирования*** (проектирования гибких производственных систем разного рода, управления разработками автоматизированных систем).

Все эти задачи по-разному реализуются на различных **уровнях управления** экономикой, поэтому целесообразно выделить области применения системного анализа и по этому принципу:

✓ задачи общегосударственного, народнохозяйственного уровня;

✓ задачи отраслевого уровня;

✓ задачи уровня объединений и организаций.

При системном подходе исследователь рассматривает проблему в целом и изучает поведение объекта (его реакцию на различные воздействия), абстрагируясь от его внутреннего устройства. Универсальный способ такого описания объекта – это наблюдение за состоянием выходов системы в различные моменты времени и установление их зависимостей от состояния входов. При данном подходе система рассматривается в виде «черного ящика». Предполагается, что система связана с внешней средой двумя способами:

1. Внешняя среда воздействует на входы системы $(\bar{X})$

2. Система воздействует на внешнюю среду через свои выходы $(\bar{Y})$

Несмотря на то, что любая система может иметь неограниченное количество входов, наблюдатель может сосредоточить свое внимание лишь на наиболее существенных из них.

Системными объектами являются: вход, выход, процесс, обратная связь, критерий и ограничение.

Входом является то, изменение чего служит причиной изменения хода процесса. Можно выделить два вида входов – так называемый «процессор» и «рабочий вход». Под процессором понимается все то, что осуществляет «обработку», а под рабочим входом – все то, над чем осуществляется обработка.

Выходом является то, что определяет конечное состояние или результат процесса.

Понятие ***процесса*** является центральным в системном анализе. Существуют три различных вида процессов:

1. *основной процесс* – преобразует вход в выход;
2. *обратная связь* – производит сравнение заданного и фактического состояния выходов, оценивает разницу между ними и вырабатывает решение, направленное на сближение заданного и фактического состояния выходов;
3. *ограничение* – устанавливается потребителем выхода системы и включает в себя определенную цель и принуждающие связи.

Системный подход не существует в виде строгой методологической концепции. Это своего рода совокупность познавательных принципов, соблюдение которых позволяет определенным образом сориентировать конкретные исследования.

Различают макроскопический и микроскопический подходы при изучении поведения системы во времени и пространстве.

Микроподход - детальное изучение чрезвычайно сложных систем на уровнях каждой из ее подсистем, каждого из элементов. Микроподход основан на так называемом принципе декомпозиции (расчленении исходной системы на элементарные части и дальнейшем выяснении детальной структуры каждого элементарного объекта и его поведения). Микроподход ведется в направлении *анализа процесса*. При анализе процесса система исследуется как некоторая совокупность связанных между собой подсистем (ячеек), определяются промежуточные выходы системы. Затем изучаются средства, с помощью которых мы можем перевести подсистемы в последовательно связанную совокупность процессов, пригодную для дальнейшей обработки.

Макроподход - игнорирование детальной структуры каждого элемента и наблюдение только глобального поведения экономической системы как единого целого. Макроподход основан на так называемом синтезе системы. Он всегда ведется в направлении *анализа конечного исхода процесса*. При анализе конечного исхода процесса мы уделяем внимание только завершающим, конечным, а не промежуточным результатам. Цель здесь состоит в создании адекватной процессу модели изучаемой системы независимо от того, физическая это система или другого типа.

Данные - есть зафиксированные результаты измерения признаков, выражающих свойства элементов, входящих в систему, и в целом системы.

Вместо сложных категорий, каковыми являются свойства, для целей системного анализа данных используются вначале лишь внешние проявления признаков для данных элементов. Например, свойство «уровень образования менеджера» многогранно и в принципе по внешнему проявлению признака может быть выражено ответом на вопрос: «Какое высшее учебное заведение Вы окончили?». Свойство «эффективность производства» - признаками-показателями объема реализованной продукции, рентабельности, себестоимости и т.п.

Целью системного анализа является решение следующих двух основных задач: задачи описания и задачи конструирования данных исследования.

К *задаче описания* относится такая, в которой необходимо одни признаки рассматриваемого объекта выразить в терминах других признаков. Так, для нужд планирования полезно иметь выражение выходных результирующих показателей: объем продукции, себестоимость продукции и др. через входные показатели: рабочие ресурсы, тип сырья, основные фонды и т.п.

К *задаче конструирования* относится такая, в которой целью является построение агрегированных, результирующих признаков из заданных ранее признаков.

Одним из основных методов количественного конструирования является *метод факторного (покомпонентного анализа)*. Он состоит в том, что надо подобрать такие линейные комбинации рассматриваемых признаков (факторов), которые бы оптимально аппроксимировали входящие признаки. При этом число исходных признаков обычно велико, а требуется так построить процедуру, чтобы число исходных признаков было минимальным.

Обычно эксперименты проводят не над самими объектами (системами), а над их образами – моделями. При этом не обязательно понимается модель физическая, т.е. копия объекта в уменьшенном виде. Физическое моделирование редко применимо к системам социальным, хоть как-то связанным с людьми. В этих случаях используется математическое моделирование.

При математическом моделировании надо учитывать, что стремление к простым, элементарным моделям и вызванное этим игнорирование ряда факторов может сделать модель неадекватно реальному объекту, грубо говоря – сделать ее неправдивой. Из хорошо зарекомендовавших себя на практике можно упомянуть модели: межотраслевого баланса, роста, планирования экономики, прогностические, равновесия и ряд других. Более подробно о моделях и методах их исследовании говорится в курсе «Экономико-математические методы и модели», см., например, [10].

В большинстве случаев практического применения системного анализа для исследования свойств и последующего оптимального управления системой можно выделить следующие основные этапы:

- Содержательная постановка задачи.
- Построение модели изучаемой системы.
- Отыскание решения задачи с помощью модели.
- Проверка решения с помощью модели.
- Подстройка решения под внешние условия.

– Осуществление решения.

Модель изучаемой системы в самом лаконичном виде можно представить в виде зависимости

$$E = f(\overline{X}, \overline{Y}),$$

где E – некоторый количественный показатель эффективности системы в плане достижения цели ее существования T, будем называть его критерием эффективности;

$\overline{X}$ – управляемые переменные системы – те, на которые мы можем воздействовать или управляющие воздействия;

$\overline{Y}$ – неуправляемые, внешние по отношению к системе воздействия, их иногда называют состояниями природы.

Возможны ситуации, в которых нет никакой необходимости учитывать состояния природы – например при решении стандартной задачи размещения запасов нескольких видов продукции. В таком случае принято говорить о принятии управляющих решений или о стратегии управления в условиях определенности.

Если же с воздействиями окружающей среды (с состояниями природы) надо считаться, то приходится управлять системой в условиях неопределенности или даже при наличии противодействия.

Тема 3. Методы решения задач качественного и количественного описания данных системы

Одним из основных методов *количественного* описания данных исследования являются всевозможные алгоритмы *регрессионного анализа* (см., например, [1]). С их помощью отыскивается в экономике представление одного или нескольких «выходных» показателей в виде количественных функций от входных признаков. При этом вид функции фиксируется заранее, а ее коэффициенты подбираются таким образом, чтобы получаемая векторная конкретная функция как можно лучше аппроксимировала значения выходных показателей на рассматриваемом конкретном объекте.

Конкретными примерами могут служить подобранные из статистических данных эксперимента производственные функции в экономике и управлении: $Y = Y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где Y - максимально возможный объем продукции, зависящий от n производственных параметров (факторов) x_k, $k = \overline{1,n}$, в качестве которых выступают различные производственные фонды, затраты труда в сфере производства, фактор уникальности производства (НТП) и др. Как правило, ограничиваются четырьмя видами производственных функций: Кобба-Дугласа, Солоу, Митчерлиха, функцией Спилмана [10].

Одним из перспективных методов количественного описания данных экономических систем является ***метод статистических уравнений зависимостей***.

Преимуществами метода статистических уравнений зависимости по сравнению с регрессионным анализом являются:

– начальный член уравнения зависимости имеет реальный экономический смысл, потому, что это минимальное или максимальное значение результативного признака;

– значения параметров для отдельных факторов и знаков при них для одно- и многофакторных уравнений одинаковы;

– сумма линейных отклонений теоретических значений результативного признака от фактических значений должна быть минимальной;

– возможность проведения достоверных расчетов в условиях малочисленной совокупности объектов исследования;

– более эффективен для диагностики состояния и обоснования тенденций развития экономики;

– может использоваться и при наличии функциональной зависимости (когда одному значению факторного признака соответствует только одно значение результативного признака).

В силу перечисленных выше преимуществ метод статистических уравнений зависимости может быть очень эффективен при исследовании экономических систем, поэтому остановимся на его рассмотрении более подробно.

Расчет параметров статистических уравнений зависимостей основывается на определении коэффициентов сравнения факторных и результативных признаков путем отношения отдельных значений одноименного признака к его минимальному или максимальному уровню. *При увеличении значений признака коэффициенты сравнения исчисляют от минимального уровня, а при уменьшении – от максимального*.

На основе этих коэффициентов определяется параметр уравнения зависимости, представляющий собой отношение суммы отклонений от единицы вычисленных коэффициентов сравнения результативного и факторного признаков.

Применение статистических уравнений зависимости для анализа взаимосвязей социально-экономических явлений требует:

– качественного анализа исследуемых факторных и результативных признаков, т.е. наличие логической зависимости между ними;

– однородности изучаемого явления; исключение из расчетов значения признака (минимальных или максимальных), значительно отличающихся (в два-три раза) соответственно от следующей за минимальной или предшествующей максимальной величины;

– оценки устойчивости связи между явлениями.

Для выполнения расчетов по данному методу необходимо:

1. Отобрать количественные показатели, характеризующие результаты работы предприятий;

2. Вычислить по отобранным показателям средние и относительные величины, дающие качественную характеристику хозяйственно-финансовой деятельности;

3. Определить форму (линейную, криволинейную) и направление связи (прямую и обратную) между факторными и результативными признаками;

4. Определить параметры уравнений зависимости;

5. Установить сумму отклонений между эмпирическими (*У*) и теоретическими ($У_x$) значениями результативного признака Σ / $У_i$ – $У_x$ /. Повторить пункты 3÷5 и подобрать форму связи, при которой $\Sigma/У_i–У_x/\rightarrow min$.

6. Вычислить показатели тесноты связи между факторными и результативными признаками: коэффициент корреляции и индекс корреляции. Их различие не должно превышать *0,01*.

7. Расчет коэффициентов устойчивости связи между факторными и результативными признаками.

Пункты 5 и 6 являются **критериями выбора вида уравнения зависимости**.

Системный анализ включает в себя следующие основные **этапы**:

1. Определение целей организации.
2. Выявление проблем.
3. Исследование проблем и постановка диагноза.
4. Конструирование решения проблем.
5. Реализация решения.

Второй, третий и четвертый этапы системного анализа составляют основу процесса диагностики экономических систем.

Наиболее часто встречающееся определение целей в системном анализе – «желаемое состояние системы или желаемый результат ее поведения».

Механизм целеполагания – это совокупность процедур, позволяющих описать в том или ином виде цели системы. Чем более точно дано описание цели системы, тем более точной окажется оценка эффективности управления. Реальные механизмы целеполагания имеют сложное строение и формируются, как правило, в виде древовидных графов.

Идея метода *дерева целей* впервые была предложена У. Черчменом в связи с проблемами принятия решений в промышленности. Японские ученые

Месарович М., Мако Д., Такахара И. отмечают иерархический характер целей и основным принципом построения дерева целей считают принципы системного анализа и принцип декомпозициии цели на подцели при переходе от одного уровня к другому, а в этом случае структура дерева целей представляется в виде многоуровнего графа целей. Путь к достижению сложной цели, требующей для решения последовательного достижения ряда промежуточных результатов, изображается в виде ветвящейся древовидной структуры путей к этим промежуточным результатам. Наибольший объем информации содержат элементы верхних и самых нижних уровней деревьев целей (общие цели системы и конкретные средства реализации.

Как правило, термин «дерево целей» используются для иерархических структур, имеющих отношения строго древовидного порядка, но сам метод иногда применяется и в случае «слабых» иерархий.

При построении дерева целей используются принципы:

– *соподчиненности целей*, вытекающей из иерархического построения производственных систем, а также иерархии целей по степени срочности и важности;

– *развертываемости*, т.е. разделение каждой цели данного уровня на цели нижележащего уровня;

– *соотносительной важности целей*, заключающейся в том, что цели одного и того же уровня могут иметь разное значение для достижения цели вышестоящего уровня.

Построение дерева целей можно проводить различными способами. Рассмотрим один из них:

1. Используя производственную информацию о возникновении объекта исследования, экспериментальные данные содержательного описания, иерархическую модель объекта (дерево системы), провести генерацию целей для объекта в целом и для каждого из его подсистем и элементов. Изложить цели на бумаге, проверить цели на однозначность понимания с заказчиком и согласования.

2. Разнести цели по уровням иерархии и элементам построенного дерева объекта. Верхним уровнем считается уровень системы, включающий исследуемую в качестве подсистемы.

3. Для каждого уровня иерархии последовательно снизувверх выделить группы зависимых между собой целей. Стрелками провести при необходимости горизонтальные связи внутри одноуровневых групп элементов (если таковые будут).

При этом для горизонтальных связей между объектами одного уровня возможны следующие ситуации:

$A \circ\!\longleftrightarrow\!\circ B$ - говорит о том, что достижение одной цели способствует достижению другой цели и наоборот (т.е. цели А и В эквивалентны и в дальнейших расчетах можно использовать любую из них).

$A \circ\!\longrightarrow\!\circ B$ - говорит о том, что достижение одной цели (цели-причины) *А* способствует достижению другой цели *В* (цели-следствия), но не наоборот. Основной является цель *А*.

$A \circ\!\rightarrow\leftarrow\!\circ B$ - говорит о том, что цели *А* и *В* хотя и взаимосвязаны, однако, характер зависимости между ними неясен, либо они вообще противоречивы. В первой ситуации требуется дополнительное выяснение характера этой взаимосвязи между *А* и *В*.

$A \circ \qquad \circ B$ - цели *А* и *В*, находящиеся на одном уровне, независимы.

В связи с пунктами 1-3 надо в дальнейшем ответить на ряд вопросов:

a) Есть ли цели уровней ниже уровня исследуемого объекта-системы, не имеющие связей с целями уровней исследуемой системы, и есть ли цели уровней выше? В связи с тем, что цели могут формулироваться только в связи с целью системы, то указанные выявленные цели нужно исключить из рассмотрения, так как они бессодержательны.

b) Есть ли между уровнями некорректные связи? Связь будем считать некорректной, если цель-причина *А* элемента нижнего уровня не связана с целью-следствием верхнего уровня, включающего в свой состав рассматриваемый элемент нижнего уровня.

c) Есть ли между целями излишние связи третьего порядка? Лишняя связь предполагает, что цель *А* влияет на цель *В*, например, дважды, трижды и т.п. (цель *С, Д*, … выступает в качестве промежуточной). Тогда одна из связей между целями *А* и *В* может быть излишней.

d) Есть ли пропуски целей между уровнями? Это может наблюдаться, если цель *А* связана с целью *В*, находящейся через уровень (через два…), чего не должно быть. Дополнительный анализ приведет к промежуточным целям.

Помимо этих вопросов выявленные цели и взаимосвязи между ними необходимо анализировать с точки зрения логики взаимосвязи элементов в процессе функционирования объекта-системы. Неосуществимые связи вычеркивают и производят, если надо, корректировку дерева целей.

Конечные цели, оставшиеся после проведения анализа на уровне 1- это *цели развития*, а конечные цели верхнего уровня – *цели стабилизации*.

Системный анализ всегда конкретен. Потому единого типового «дерева целей» не может быть ни для промышленного предприятия, ни для иного объекта. На построение «дерева целей» влияют в основном два фактора: специфика объекта и особенности той проблемы, для решения которой проводится анализ целей.

Тема 4. Этапы системного анализа, постановка многокритериальных задач

Проектирование и исследование экономических систем обычно носит характер эвристического итерационного процесса. Исследователь, рассматривая различные варианты модели, оценивает результаты, уточняет постановку задачи, затем снова решает ее и анализирует новые варианты.

Наиболее общей математической моделью принятия оптимального с точки зрения исследователя решения является задача так называемой многокритериальной оптимизации. В ней требуется получить наилучшие (максимальные или минимальные) значения для нескольких характеристик системы. Точнее говоря, в многокритериальной математической модели мы должны найти такое оптимальное решение $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$, которое обеспечивает оптимум одновременно по всем введенным критериям оптимальности $Q_k(x), k = \overline{1,n}$. Обычно в конкретных прикладных задачах эти частные критерии $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_k(x), \dots Q_n(x)$ противоречат друг другу (то есть уменьшение одних должно приводить к увеличению других).

Приведем простейший **пример**. Требуется изготовить коробку максимально возможного объема при минимальном расходе материала железного листа, имеющего форму квадрата (рисунок 1).

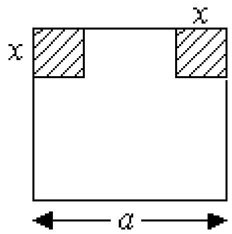


Рисунок 1

Очевидно, мы получим коробку, объем которой равен:

$$x(a-2x)^2, \qquad (1)$$

где a-сторона данного квадрата, x- неизвестная сторона вырезаемого квадрата.

Ясно, что теряется железо общей площади $4x^2$. По условию задачи мы должны удовлетворить следующим двум критериям:

К$_1$: $x(a-2x)^2$ (объем коробки) стремится к максимуму;

К$_2$: $4x^2$ (расход вырезаемого материала) стремится к минимуму.

Представим параболы-графики функций $y_1 = x(a-2x)^2$ (рисунок 2) и $y_2 = 4x^2$ (рисунок 3).

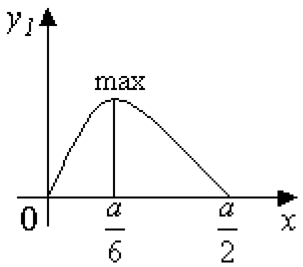


Рисунок 2

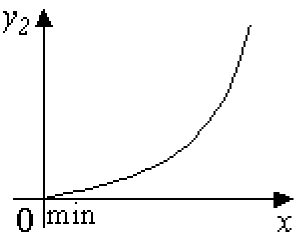


Рисунок 3

Мы видим, что одновременно удовлетворить обоим критериям невозможно (максимального объема коробка достигнет при $x_1 = a/6$, а расходы железа вырезаемой части достигнут минимума при $x_2 = 0$).

При рассмотрении экономических систем в качестве частных критериев оптимальности могут служить:

а) максимизация стоимости товарной продукции;

б) максимизация прибыли;

в) минимизация себестоимости;

г) минимизация затрат на один рубль товарной продукции;

д) минимизация времени изготовления партии заказа и т.п.

В связи с вышеобозначенным, для совместного учета всей совокупности частных критериев $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ нам потребуется рассматривать так называемый векторный критерий оптимальности вида:

$$\vec{Q}\,(x) = \left(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)\right),$$ где $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

(2)

приводящий к вышеупомянутой модели принятия оптимального управленческого решения. Получаем следующую постановку основной многокритериальной оптимизационной задачи:

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) \to optimum,\ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_m),\ \ a_k \le x_k \le b_k,\ k = \overline{1,m}\ \ \vec{x} \in X_0 \qquad (3)$$

При решении многокритериальных задач вводится понятие **множество Парето** (по имени известного итальянского экономиста). Раскроем его сущность.

Рассмотрим на плоскости (x, y) произвольную область (A). Каждая ее точка может быть либо внутренней, либо граничной. Точка M_1 называется внутренней (рисунок 4.4), если все точки сколь угодно малой окрестности точки $M_1 \in (A)$ принадлежат области (A). Точка M_2 является пограничной для области (A), если сколь угодно близко от M_2 расположены как точки из (A), так и точки, не принадлежащие области (A). Сама пограничная точка M_2 может как принадлежать области (A), так и не принадлежать области (A). Множество всех пограничных точек для (A) называется границей и обозначается через $\partial(A)$. Пусть теперь M – произвольная точка множества (A), а (x, y) - ее текущие координаты.

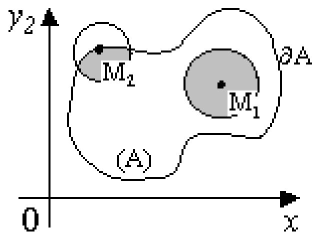


Рисунок 4

Вопрос: можно ли, оставаясь во множестве (A) переместиться из точки M (x, y) в близкую ей точку так, чтобы увеличивались обе ее координаты? Если точка M - внутренняя, что, очевидно, это сделать можно. Если же точка M - пограничная, что такое возможно не всегда. Видно, что исходное множество (область (A)) можно разбить на три класса (рисунок 5).

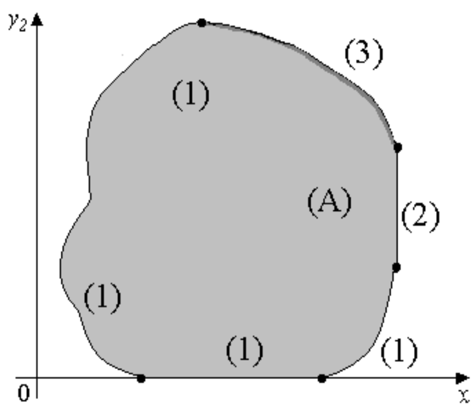


Рисунок 5

В первый класс (1) попадают все внутренние точки из (A) и часть его пограничных точек.

Второй класс (2) образуют точки, перемещением которых по области (A) можно увеличить только одну из координат при сохранении значения второй (вертикальный и горизонтальный отрезки на границе области (A)).

В третьем классе (3) окажутся точки, перемещение которых по множеству (A) способно лишь уменьшить хотя бы одну из координат x или y.

Множество точек третьего класса ввиду его важности было выделено и названо *множеством Парето* (или *границей Парето*) для данной области (A).

Иными словами, граница (множество) Парето для данной области (A) – это точки, из которых нельзя сдвинуться на «север», «восток» или «северо-восток», оставаясь в той же области (A).

Решить многокритериальную задачу довольно сложно. Механизм ее решения состоит в отыскании такого способа упорядочения векторов $\vec{Q}(x)$, который был бы естественным для той или иной ситуации. Практикой выработано множество способов решения многокритериальных задач. Рассмотрим содержание наиболее важных из них более подробно.

Тема 5. Способы решения многокритериальных задач

Метод анализа полезной стоимости альтернатив применяется для решения многокритериальных задач следующего типа:

Дано: группа из N критериев, предназначенных для оценки любых возможных альтернатив; альтернативы либо заданы частично, либо появляются после построения решающего правила.

Требуется: на основании предпочтений лица принимающего решение (ЛПР) построить решающие правила, позволяющие:

а) упорядочить по качеству все возможные альтернативы;

б) отнести все возможные альтернативы к одному из нескольких (указанных ЛПР) классов решений.

Примером задач данного типа является построение правила принятия решений для государственного или частного фонда, распределяющего ресурсы на научные исследования. Проекты проведения исследований еще не поступили, но критерии оценки и решающее правило должны быть определены заранее. Обычно таких проектов много, и можно предположить, что они будут достаточно разнообразны по оценкам. Критерии и решающее правило определяет ЛПР. Затем уже поступают проекты, которые оцениваются экспертами по заданным критериям. Решающее правило позволяет сразу же получить целостную оценку проекта.

Метод анализа полезной стоимости альтернатив представляет собой единую стройную математическую теорию, позволяющую обосновать конкретный вид общей функции полезности в зависимости от предпочтений ЛПР. Эта теория подробно описана в широко известных книгах Х.Райфы и Р.Кини.

При использовании метода полезной стоимости учитывают несколько целевых функций, взвешенных по их значимости для ЛПР. При этом стремятся определить степень достижения отдельных целей посредством ряда альтернатив, указывая их в форме частичной полезной стоимости и сводя в единую полезную стоимость для каждой альтернативы с присвоением весов критериям. Это позволяет скомпенсировать неблагоприятные проявления отдельных целевых функций.

В целом *анализ полезной стоимости* включает в себя этапы:

а) определения и взвешивания целевых критериев;

б) определения показателей частичной полезной стоимости и полной полезной стоимости;

в) оценки выгодности альтернатив.

Рассмотрим процесс анализа полезности на конкретном примере.

ПРИМЕР.

Необходимо исследовать процесс анализа полезности на основе оценки относительной выгодности трех альтернатив местоположения A_1, A_2 и A_3 промышленного предприятия.

Решение. Пусть в процессе *определения целевых критериев* сформирована иерархия целей (рис.4.6), которая, наряду с главной целью первого уровня иерархии (выбором оптимального местоположения предприятия – *ВОПП*), содержит четыре подцели второго уровня: земельный участок – *ЗУ*, персонал – *П,* материальные ресурсы и транспорт – *МриТ,* влияние государства – *ВГ*), конкретизируемые группой критериев на третьем уровне иерархии: для земельного участка – его размер (*РЗУ*), цена (*ЦЗУ*), расходы на освоение (*РО*); для персонала – его потенциал (*ПП*) и конкуренция на рынке (*КР*) рабочей силы;

для материальных ресурсов и транспорта – транспортная инфраструктура (*ТИ*) и виды транспортно-экспедиторских фирм (*ТЭФ*), потенциал поставщиков (*ППс*) и предложение банковских услуг (*ПБУ*); для влияния государства – меры стимулирования (*МС*) и ставка налога на деятельность (*СНД*).

На этапе *взвешивания целевых критериев* необходимо определить веса как для подцелей, так и для критериев низшего уровня.

Определение *показателей частичной полезности* покажем на примере критерия «размер земельного участка» – *РЗУ*. Пусть рассматриваемые альтернативы имеют следующие значения *РЗУ*, тыс. м^2: 60 – A_1, 42,5 – A_2 и 35 – A_3. Для преобразования этих проявлений в показатели частичной полезности можно применить частично постоянные функции преобразования согласно рис. 4.7, на котором показатели частичной полезности альтернатив составляют 1,0 – для A_1, 0,2 – для A_2 и 0 – для A_3.

Примечание. Известны три вида функций преобразования:

а) *дискретные,* при которых специфическим классам достижения целей присваиваются определенные показатели частичной полезности с измерением степени достижения цели в порядковом выражении или с преобразованием номинально измеренных данных в порядковые показатели;

б) *частично постоянные*, при которых все показатели определенного интервала преобразуются в специфичный показатель частичной полезности с измерением степени достижения цели в количественном отношении;

в) *постоянные*, при которых даже незначительные различия в показателях степени достижения целей обуславливают различия в показателях частичной полезности.

Таблица 1 – Показатель частичной полезности для целевых критериев по главной цели – выбору оптимального положения предприятия

Альтернативы	Целевой критерий										
	РЗУ	*ЦЗУ*	*РО*	*ПП*	*КР*	*ТИ*	*ТЭФ*	*ППс*	*ПБУ*	*МС*	*СНД*
A_1	1,0	0,4	1,0	0,2	0,4	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,6
A_2	0,2	0,4	0,2	0,6	0,8	0,4	0	1,0	0,8	0,8	1,0
A_3	0	0,6	0,8	0,9	1,0	0,8	1,0	0,2	0,8	0,4	0,4

Далее определим значения *показателей полезности,* для чего необходимо взвесить показатели частичной полезности, которые рассчитываются путем умножения показателя частичной полезности на веса принадлежащего критерия и подчиненной цели. Например, для альтернативы A_1 и критериев *РЗУ* и *ЦЗУ* эти показатели составляют:

$$РЗУ_{A_1} = 1{,}0 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06;$$

$$ЦЗУ_{A_1} = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}04;$$

$$РО_{A_1} = 1{,}0 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04.$$

Посредством расчета соответствующих показателей для всех других критериев и суммированием этих показателей можно определить показатели полезности альтернатив:

$$П_{A1} = 0{,}48;\ П_{A2} = 0{,}61;\ П_{A3} = 0{,}67.$$

Таким образом, имеем, что альтернатива А3 относительно выгодна по сравнению с остальными альтернативами.

В целом следует отметить, что, хотя построение общей функции полезности требует достаточно много времени и усилий ЛПР, полученный результат позволяет оценить любые (в том числе и вновь появляющиеся) альтернативы. Метод анализа полезной стоимости альтернатив является относительно простым способом нахождения решений при многоцелевых проблемах, ведущим к их системному структурированию, относительно легкой интерпретации результатов как нормы процента максимальной величины этого показателя. Сложно здесь определять целевые критерии, их веса, показатели степени достижения цели и в большинстве случаев – функции преобразования. Для показателей весов целей и частичной полезности, рассчитываемых с помощью функций преобразования, необходимо введение измерений в количественном выражении, а это можно сделать лишь на основе субъективных оценок (получение этих субъективных оценок связано с высоким уровнем затрат).

При методе анализа полезной стоимости альтернатив одни и те же усилия ЛПР по построению функции полезности могут быть затрачены при большом и малом числе альтернатив. Не всегда такой подход является обоснованным. В случае небольшого числа заданных альтернатив представляется разумным направить усилия ЛПР на сравнение только заданных альтернатив. Именно такая идея лежит в основе метода аналитической иерархии.

Подход аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process – AHP) широко известен в настоящее время. ***AHP-метод*** предложен Т.Л. Саати для структурирования и анализа сложных ситуаций, а также подготовки решений проблем с несколькими целевыми функциями. Данный подход используется для решения задач следующего типа:

Дано: группа из n альтернатив-вариантов решения проблемы и N критериев, предназначенных для оценки альтернатив; каждая из альтернатив имеет оценку по каждому из критериев.

Требуется: построить решающие правила на основе предпочтений ЛПР, позволяющие:

а) выделить лучшую альтернативу;

б) упорядочить альтернативы по качеству;

в) отнести альтернативы к упорядоченным по качеству классам решения.

Примером таких задач является многокритериальная оценка имеющихся в продаже товаров, например, телевизоров или стиральных машин. Здесь все возможные альтернативы заданы, критерии определены ЛПР, оценки реальных альтернатив по критериям дают, как правило, эксперты. От ЛПР требуется построить правило сравнения объектов, имеющих оценки по многим критериям (например, сравнить стиральные машины на основании таких оценок, как цена, долговечность, стоимость эксплуатации, надежность, возможность ремонта и т.д.).

Метод аналитической иерархии предусматривает декомпозицию проблемы на отдельные ее части, обеспечивая ее структурирование и упрощение с выделением иерархии, содержащей различные главные цели, подцели, критерии или уровни мероприятий (альтернативы), подлежащие оценке. Относительная значимость различных количественных и качественных критериев определяется в отдельности для каждого вышестоящего элемента путем сопоставления пар. Таким же образом в модель интегрируется фактор выгодности мероприятий. Для частичных целевых функций типа альтернативы можно определить общий показатель, отражающий относительную значимость или выгодность альтернатив в отношении совокупной иерархии и тем самым главной цели.

Подход АНР состоит из совокупности этапов.

1. Первый этап заключается в структуризации задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели – критерии – альтернативы.

2. На втором этапе ЛПР выполняет попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений переводятся в числа.

3. Вычисляются коэффициенты важности для элементов каждого уровня. При этом проверяется согласованность суждений ЛПР.

4. Подсчитывается количественный индикатор качества каждой из альтернатив и определяется наилучшая альтернатива.

Рассмотрим практическое применение подхода аналитической иерархии на конкретном примере.

ПРИМЕР.

В силу ряда обстоятельств жители города *М* стали чаще выезжать за границу. Существующие аэропорты не соответствовали новому потоку пассажиров. Возникла необходимость в построении нового аэропорта около города *M*.

Правительство страны назначило комиссию по выбору места для аэропорта. Были обследованы различные площадки около города, где постройка аэропорта нужного размера представлялась возможной. После многочисленных дискуссий комиссия определила три основных критерия для оценки вариантов расположения аэропорта.

1. Стоимость постройки. Желательно построить аэропорт с заданной пропускной способностью за наименьшую возможную цену.

2. Расстояние от города. Желательно, чтобы поездка пассажиров от аэропорта в город и обратно занимала наименьшее время.

3. Минимальное шумовое воздействие. Количество людей, подвергающихся нежелательным шумовым воздействиям, должно быть минимальным.

Задание состоит в выборе оптимального из предложенных вариантов места площадки для строительства аэропорта.

Решение. Из условия задачи легко заметить, что все критерии оценки вариантов расположения аэропорта противоречивы. Постройка аэропорта на большом расстоянии от города потребует, вероятно, меньших затрат, хотя время поездки будет больше. Противоречивы также критерии расстояния от города и числа людей, подвергающихся шумовым воздействиям.

При *попарных сравнениях* в распоряжении ЛПР дается шкала словесных определений уровня важности, причем каждому определению ставится в соответствие число (таблица 2).

Таблица .2 – Шкала относительной важности

Уровень важности	Количественное значение
Равная важность	1
Умеренное превосходство	3
Существенное или сильное превосходство	5
Значительное (большое) превосходство	7
Очень большое превосходство	9

При сравнении элементов, принадлежащих одному уровню иерархии, ЛПР выражает свое мнение, используя одно из приведенных в таблице 2 определений. В матрицу сравнения заносится соответствующее число. Матрица сравнений критериев выбора площадки для аэропорта приведена в таблице 3.

Матрица соответствует следующим предпочтениям гипотетического ЛПР: критерий «Стоимость» существенно превосходит критерий «Время в пути» и умеренно превосходит критерий «Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям»; критерий C_2 умеренно превосходит критерий C_3.

Таблица.3 – Матрица сравнений для критериев

<table>
<tr><th rowspan="2">Критерий</th><th>C_1</th><th>C_2</th><th>C_3</th><th rowspan="2">Собственный вектор</th></tr>
<tr><th>Стоимость</th><th>Время в пути до центра города</th><th>Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям</th></tr>
<tr><td>C_1 Стоимость</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>2,47</td></tr>
<tr><td>C_2 Время в пути до центра города</td><td>1/5</td><td>1</td><td>3</td><td>0,848</td></tr>
<tr><td>C_3 Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям</td><td>1/3</td><td>1/3</td><td>1</td><td>0,48</td></tr>
</table>

На нижнем уровне иерархической схемы сравниваются заданные альтернативы (конкретные площадки) по каждому критерию отдельно. Приведем эти сравнения в таблице 4.

Таблица 4 – Относительная важность альтернатив по отдельным критериям

По критерию C_1 (Стоимость)					
Альтернатива	*А*	*В*	*К*	Собственный вектор	Вес
А	1	7	3	2,76	0,69
В	1/7	1	3	0,755	0,19
К	1/3	1/3	1	0,48	0,12
По критерию C_2 (Время в пути до центра города)					
А	1	1/7	1/5	0,31	0,07
В	7	1	3	2,76	0,65
К	5	1/3	1	1,18	
По критерию C_3 (Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям)					
А	1	5	5	2,93	0,68
В	1/5	1	1/5	0,34	0,09
К	1/5	5	1	1	0,23

Таблицы 4.3 и 4.4 позволяют *рассчитать коэффициенты важности соответствующих элементов иерархического уровня*. Для этого нужно вычислить собственные векторы матрицы, а затем пронормировать их. Формула для этих вычислений: извлекается корень *n*-й степени (*n* – размерность матрицы сравнений) из произведений элементов каждой строки. Так из таблицы 4.3 определяются коэффициенты важности критериев. В последнем столбце таблицы приведены значения собственных векторов, определенные из соотношений:

$$\sqrt[3]{1 \cdot 5 \cdot 3} = 2{,}47;\ \sqrt[3]{1/5 \cdot 1 \cdot 3} = 0{,}848;\ 3\sqrt{1/3 \cdot 1/3 \cdot 1} = 0{,}48$$

Итого: 3,798.

Нормирование этих чисел дает следующие значения относительных весов важности критериев:

$$W_1 = \frac{2{,}47}{3{,}798} = 0{,}65;\ ,\ W_2 = \frac{0{,}848}{3{,}798} = 0{,}22;\ ,\ W_3 = \frac{0{,}48}{3{,}798} = 0{,}13\ ,$$

где W_i – вес *i*-го критерия, доли единицы.

Таким же способом на основе таблицы 4 можно рассчитать важность каждой из площадок по каждому из критериев. В таблице приведены веса соответствующей площадки по каждому из критериев.

Определение наилучшей альтернативы. Синтез полученных коэффициентов важности осуществляется по формуле:

$$S_j = \sum_{i-1}^{N} w_i V_{ji}, \tag{4}$$

где S_j – показатель качества j-й альтернативы; w_i – вес i-го критерия; V_{ji} – важность j-й альтернативы по i-му критерию.

Для трех площадок проведенные вычисления позволяют определить:

$$S_A = 0{,}65 \cdot 0{,}69 + 0{,}22 \cdot 0{,}07 + 0{,}13 \cdot 0{,}68 = 0{,}552;$$

$$S_B = 0{,}65 \cdot 0{,}19 + 0{,}22 \cdot 0{,}65 + 0{,}13 \cdot 0{,}09 = 0{,}278;$$

$$S_к = 0{,}65 \cdot 0{,}12 + 0{,}22 \cdot 0{,}28 + 0{,}13 \cdot 0{,}23 = 0{,}17.$$

Итак, альтернатива *A* оказалась лучшей.

Достоинством метода AHP, привлекающим внимание многих пользователей, является направленность на сравнение реальных альтернатив.

Отметим, что метод AHP может применяться и в тех случаях, когда эксперты (или ЛПР) не могут дать абсолютные оценки альтернатив по критериям, а пользуются более слабыми сравнительными измерениями. Метод AHP позволяет решить множество практических задач.

Тема 6. Основные характеристики графов, матричные способы задания, маршруты и циклы, связность и достижимость

Первая работа по теории графов принадлежащая Эйлеру, появилась в 1736 году. Вначале эта теория была связана с математическими головоломками и играми. Однако впоследствии теория графов стала использоваться в топологии, алгебре, теории чисел. В наше время теория графов находит применение в самых разнообразных областях науки, техники и практической деятельности. Она используется при проектировании электрических сетей, планировании транспортных перевозок, построении молекулярных схем. Применяется теория графов также в экономике, психологии, социологии, биологии.

Теория графов - это исключительно удобный аппарат для моделирования структурных свойств систем и отношений между объектами самой разнообразной природы. Благодаря наглядности и простоте этот аппарат в последнее время завоевал широкое признание и повсеместно используется в научно-технической литературе.

На основе аналогий между физическими величинами развивается общая методика построения математических моделей систем в различной форме.

1. Основные характеристики графов

Рассмотрим конечное или счетное множество X, состоящее из элементов, называемых точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, на множестве X задано множество отношений T, позволяющих установить соответствие между каждым элементом множества X и некоторым его подмножеством. Каждая пара точек x_i, x_j множества X, между которыми установлено отношение из множества T, называется ребром.

Определение 1. Граф $G=G(X, T)$ – это математический объект, определяемый множествами X и T, где $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ – множество вершин графа, T - множеств его рёбер.

С геометрической точки зрения граф $G=G(X, T)$ – это непустое множество точек (вершин) и множество ребер (отрезков), концы которых принадлежат множеству точек.

Для многих задач несущественно, являются ли рёбра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Таким образом, каждое ребро графа определяется парой его вершин, например, $e=(a,b)$. Если ребро определяется неупорядоченной парой вершин, т.е. $e=(a,b)=(b,a)$, то оно называется неориентированным, в противном случае ориентированным $((a,b)\neq (b,a))$. Говорят, что вершины a, b инцидентны ребру *e*, а ребро *e* инцидентно вершинам *a*, *b*, как в случае неориентированного ребра, так и случае ориентированного ребра. Вершины, определяющие ребро *e* называются концевыми. Для ориентированного ребра вершина *a* называется начальной, *a* вершина *b* конечной.

Две вершины называются смежными, если они соединены ребром, два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Вершина графа называется изолированной, если она не инцидентна ни одному ребру.

Ребро графа, у которого конечные вершины совпадают, называется петлей.

Граф называется **неориентированным**, если все его ребра неориентированные, в противном случае **ориентированным**. Граф, у которого имеются как ориентированные, так и неориентированные ребра называется **смешанным**.

Степенью $\rho(x)$ вершины графа называется число ребер, которым эта вершина принадлежит (инцидентна).

Пусть граф $G(X, T)$ задается множеством вершин $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и множеством ребер $T=(e_1, e_2, \ldots, e_m)$.

Определение 2. Матрицей смежности графа $G(X,T)$ называется матрица A размерности $m \times n$, каждый элемент которой равен количеству ребер, соединяющих вершины x_i, x_j , т.е.:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } (x_i x_j) \in A, \\ 0, \textit{если } (x_i, x_j) \notin A. \end{cases}$$

Определение 3. Матрицей инцидентности графа $G(X,T)$ называется матрица B размерности $n \times m$, каждый элемент которой равен 1, если вершина x_i инцидентна ребру e_j , и равен 0 в противном случае :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_i \text{является началом дуги } a_j; \\ -1, \text{если вершина } x_i \text{является концом дуги } a_j; \\ 0, \text{если вершина } x_i \text{не инцидентна дуге } a_j; \end{cases}$$

для неориентированного графа:

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j; \\ 0, \text{если вершина } x_i \text{не инцидентна ребру } a_j. \end{cases}$$

Весьма часто требуется уточнить, какие ребра считаются различными, а какие не различаются. Это уточнение обычно связывается с понятием изоморфизма графов.

Графы $G_1 = (X_1, A_1)$ и $G_2 = (X_2, A_2)$ называются ***изоморфмными***, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X_1 \to X_2$, сохраняющее смежность.

С точки зрения этого понятия абстрактный граф и его геометрическая реализация являются изоморфными графами. Поэтому вместо абстрактных конечных графов можно рассматривать их реализации. Другими словами, с графами можно обращаться как с геометрическими объектами.

Очевидно, что отношение изоморфизма – это отношение эквивалетности, удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Пример:

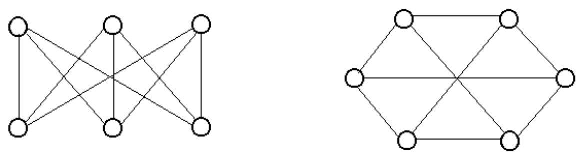


Рис. 1 Изоморфные графы

У изоморфных графов одинаковое число вершин и ребер. Но этого недостаточно для изоморфизма.

Изоморфные графы отличаются только нумерацией вершин. Матрицы смежности двух изоморфных графов могут быть получены одна из другой перестановкой строк и столбцов. Чтобы узнать, являются ли два графа изоморфными, нужно произвести все возможные перестановки строк и столбцов матрицы смежности одного из графов. Если после какой-нибудь перестановки получится матрица смежности второго графа, то эти графы изоморфны. Чтобы убедиться, что графы неизоморфны, надо выполнить все $n!$ возможных перестановок строк и столбцов. Примеры:

На рис. 4.2 изображен неориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_2, x_3), a_3 = (x_1, x_3), a_4 = (x_3, x_4)\}$.

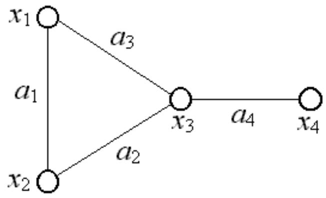


Рис. 2. Неориентированный граф $G = (X, A)$

На рис. 4.3 изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3), a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}$.

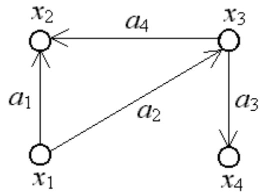


Рис. 3. Ориентированный граф $G = (X, A)$

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют ***кратными.*** Граф, содержащий кратные ребра, называется ***мультиграфом.*** Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Подграфом неориентированного графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Аналогично определяется подграф ориентированного графа. Подграф называется ***собственным***, если он отличен от самого графа.

Граф $G = (X, A)$ такой, что любые две его вершины смежные называется ***полным*** графом.

Зачастую при решении прикладных задач каждому ребру графа ставят в соответствие действительное число, называемое весом ребра. Вес ребра зависит от смысла решаемой задачи. В таких случаях граф задается тройкой множеств $G=G(X,T,W)$, где W – множество весов графа, $W=(w_i)$ – вес ребра e_i графа G. Для таких графов, не содержащих кратных ребер, можно обобщить матрицу смежности так, что каждый её ненулевой элемент равняется весу соответствующего ребра.

К основным свойствам матриц смежности и инцидентности можно отнести такие:

1. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Для ориентированного графа это, вообще говоря, неверно.

2. Сумма элементов i - ой строки или i -го столбца матрицы смежности неориентированного графа равна степени вершины x_i.

3. Сумма элементов i - ой строки матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, исходящих из x_i.

4. Сумма элементов i - го столбца матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, входящих в вершину x_i.

5. Сумма строк матрицы инцидентности ориентированного графа является нулевой строкой.

6. Число единиц в матрице инцидентности равно числу единиц с минусом и равно числу дуг в графе.

Итак, возможны следующие различные способы задания графа:

а) посредством графического изображения;

б) указанием множества вершин и множества ребер (дуг);

в) матрицей смежности;

г) матрицей инцидентности.

2. Путь, маршруты, циклы, связность в графе

Пусть G – неориентированный граф.

Определение 4. Путем от вершины x_i до вершины x_j графа G называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер графа, ведущая от x_i к x_j, в которой два соседних ребра имеют общую вершину и ни одно ребро не встречается дважды, длиной пути называется число ребер этого пути. Вершина x_i – начальная вершина пути, вершина x_j –конечная.

Путь называется простым, если он не проходит через одну вершину более одного раза.

Циклом называется путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают, длина цикла – число ребер в этом цикле.

Цикл называется ***простым***, если он не проходит через одну вершину более одного раза.

Две вершины графа называются ***связными***, если в графе существует путь с концами в этих вершинах, и н***есвязными*** в противном случае.

Граф называется ***связным***, если любые две его вершины связные, в противном случае ***несвязными***.

Определение 5. Связный граф, не содержащий циклов, называется ***деревом***.

Вершина дерева, имеющая степень 1, называется ***висящей***.

Рассмотрим ориентированный граф. В таких графах ориентированное ребро $e=(a,b)$ изображают в виде отрезка прямой со стрелкой в вершине b.

Число ребер, исходящих из вершины ориентированного графа x_i , называется полустепенью исхода вершины x_i , число ребер, входящих в x_i , - полустепенью захода вершины x_i .

Вершина x_i называется источником, если ее полустепень захода равна нулю, и стоком, если ее полустепень исхода равна нулю.

Определение 6. Последовательность ребер графа $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего, называется ***маршрутом*** в графе от x_1 до x_k.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется замкнутым.

1. Алгоритм нахождения минимального остовного дерева на сети

В приложениях используется обычно альтернативная терминология.

Граф называют сетью, ребро дугой, вершину узлом. Узлы изображают кружками, ребра дугами.

Для нахождения минимального пути между двумя произвольными вершинами для случая, когда все $c_{ij} \geq 0$ можно воспользоваться простым алгоритмом Дейкстры. В общем случае задача решается с помощью алгоритмов Флойда, Форда, Беллмана и др.

Алгоритмы нахождения минимального пути могут быть использованы и для поиска кратчайших путей в ориентированном графе без контуров. Для этого нужно каждой дуге приписать вес, равный единице.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть граф G имеет n вершин и m ребер Так как всякое дерево с n вершинами по определению имеет $n - 1$ ребер, то любое остовное дерево графа G получается из этого графа в результате удаления $m - (n - 1) = m - n + 1$ ребер. Число $\gamma = m - n + 1$ называется ***цикломатическим числом*** графа.

У графа, который является деревом, число ребер на единицу меньше числа вершин. Дерево не содержит циклов, любые две его вершины можно соединить единственной простой цепью.

Задача построения ***минимального остовного дерева*** заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин дуг минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева сети.

а) Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной.

б) Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального остовного дерева можно решить с помощью следующего алгоритма.

Пусть

G – неориентированная сеть с конечным числом узлов $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

C_k – связное множество узлов сети, соединенных алгоритмом после выполнения k-ой итерации; $\overline{C_k}$ – несвязное множество узлов сети (не соединенных с узлами множества C_k) после выполнения k-ой итерации.

Алгоритм Краскала:

Шаг 0. С $=\emptyset$, $\bar{C}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Шаг 1. Начать с любого узла сети, включив этот узел в множество С, исключив этот узел из множества $\bar{C}$.

Шаг 2. В множестве $\bar{C}$ найти узел, находящийся на кратчайшем расстоянии от узла множества C, включить этот узел в множество C, исключив из множества $\bar{C}$. Кратчайшее расстояние зафиксировать.

Шаг 3. Шаг 2 повторять до тех пор, пока множество $\bar{C}$ не станет пустым.

Шаг 4. По узлам множества C, полученного на последнем шаге построить минимальное остовное дерево. Все зафиксированные расстояния сложить для получения минимальной суммы длин дуг.

Пример. Построить минимальное дерево-остов в заданной сети. Сеть задана матрицей весов.

	1	2	3	4	5	6
1	-	1	5	7	9	-
2	1	-	6	4	3	-
3	5	6	-	5	-	10
4	7	4	5	-	8	3
5	9	3	-	8	-	-
6	-	-	10	3	-	-

Решение.

Шаг 0. Образуем связное множество $C=\emptyset$ и несвязное множество $\bar{C}$ = (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Шаг 1. Начать с любого узла сети, например, с узла 1: C = (1), $\bar{C}$ = (1, 3, 4, 5, 6) .

Шаг 2. В множестве $\bar{C}$ выберем узел, находящийся на кратчайшем расстоянии к узлу 1 – это узел 2, включим его в множество C = (1, 2), исключив его из множества $\bar{C}$ = (3, 4, 5, 6). Кратчайшее расстояние зафиксируем. $D_{12} = 1$.

Шаг 3. В множестве $\bar{C}$ выберем узел, находящийся на кратчайшем расстоянии от узлов 1, 2 множества C. Это узел 5, тогда скорректированные множества: C = (1, 2, 5), $\bar{C}$ = (3, 4, 6). Кратчайший путь между узлами 2 и 5 фиксируем: $D_{25}=3$.

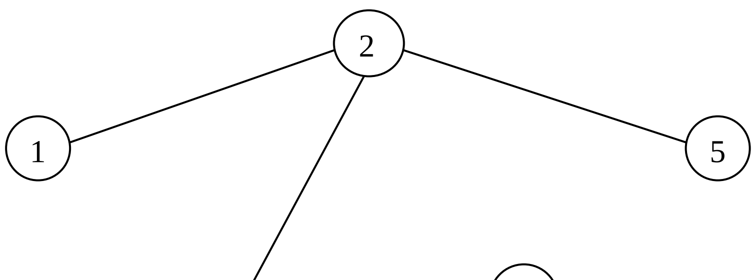
Шаг 4. В множестве $\bar{C}$ выберем узел, находящийся на кратчайшем расстоянии от узлов 1, 2, 5 множества C. Это узел 4, тогда скорректированные множества: C = (1, 2, 5, 4), $\bar{C}$ = (3, 6). Кратчайший путь между узлами 2 и 4 фиксируем: $D_{24}=4$.

Шаг 5. В множестве $\bar{C}$ выберем узел, находящийся на кратчайшем расстоянии от узлов 1, 2, 5, 4 множества C. Это узел 6, тогда скорректированные множества: C = (1, 2, 5, 4, 6), $\bar{C}$ = (3). Кратчайший путь между узлами 4 и 6 фиксируем: $D_{46}=3$.

Шаг 6. В множестве $\bar{C}$ выберем узел, находящийся на кратчайшем расстоянии от узлов 1, 2, 5, 4, 6 множества C. Это узел 3, тогда скорректированные множества: C = (1, 2, 5, 4, 6, 3), $\bar{C} = \emptyset$. Кратчайший путь между узлами 3 и 4 фиксируем: $D_{34}=5$. Процесс завершен, так как множество $\bar{C}$ - пустое.

Шаг 7. Сложив все кратчайшие расстояния, определим кратчайший путь на заданной сети: $D = D_{12} + D_{25} + D_{24} + D_{46} + D_{34} = 16$.

Шаг 8. Построим по элементам множества C, полученному на последнем шаге, минимальное дерево-остов.



2. Алгоритм нахождения кратчайшего маршрута на сети

Задача нахождения кратчайшего маршрута на ориентированной сети состоит в нахождении связных между собой дуг, которые в совокупности имеют минимальную длину от исходного пункта до конечного. Существует два алгоритма нахождения кратчайшего маршрута для сетей без циклов и для сетей, имеющих циклы.

Рассмотрим алгоритм для сетей без циклов с конечным числом узлов n.

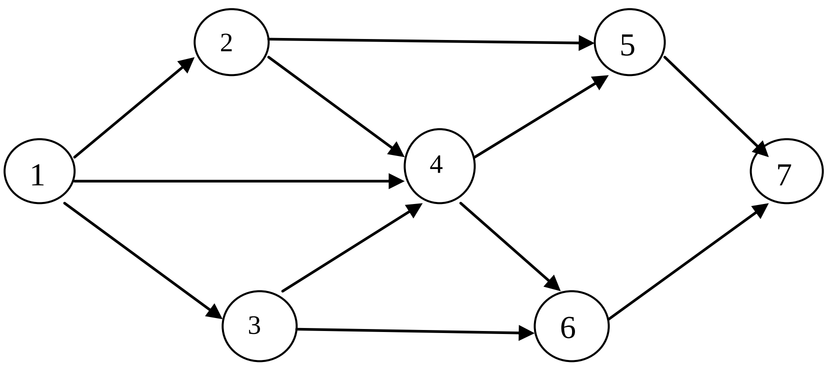
Обозначим: d_{ij} – расстояние на сети между смежными узлами i и j;

u_j – расстояние между узлами 1 и j.

Кратчайшее расстояние до узла j находится как минимальная сумма расстояний до узла i и d_{ij}., т.е. $u_j = \min\limits_{i}(u_i + d_{ij})$.

Процедура заканчивается по достижению узла n. Вычисления носят рекурсивный характер, так как кратчайшее расстояние до узла j можно вычислить после того как определено кратчайшее расстояние до узла i.

Пример. Дана сеть, узел 1 представляет начальную точку (исходный пункт), узел 7 – концевую (пункт назначения). Найти кратчайший маршрут на сети от узла 1 до узла 7. Веса дуг заданы в матрице весов.



	1	2	3	4	5	6	7
1	-	2	4	10	-	-	-
2	-	-	-	11	5	-	-
3	-	-	-	3	-	1	-
4	-	-	-	-	8	7	-
5	-	-	-	-	-	-	6
6	-	-	-	-	-	-	9

Решение.

1. $U_1 = 0$.

2. $U_2 = U_1 + d_{12} = 0+2=2$; $U_3 = U_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4$.

3. $U_4 = \min\{U_1 + d_{14}, U_2 + d_{24}, U_3 + d_{34}\} = \min\{0 + 10, 2 + 11, 4 + 3\} = 7$.

4. $U_5 = \min\{U_2 + d_{25}, U_4 + d_{45}\} = \min\{2 + 5, 7 + 8\} = 7$.

5. $U_6 = \min\{U_3 + d_{36}, U_4 + d_{46}\} = \min\{4 + 1, 7 + 7\} = 5$.

6. $U_7 = \min\{U_5 + d_{57}, U_6 + d_{67}\} = \min\{7 + 6, 5 + 9\} = 13$.

Кратчайший путь определятся в обратном порядке, исходя из узла 7 по минимальным значениям:

$$1 \to 2 \to 5 \to 7.$$

Таким образом, найден кратчайший путь от узла 1 до узла 7, его длина равна 13.

3. Алгоритм нахождения максимального потока в сети

Понятие разреза играет важную роль при изучении вопросов, связанных с отделением одного множества узлов сети от другого. Такие задачи возникают, например, при изучении потоков в связных ориентированных сетях без петель $G = (M, R)$; потоком в сети $G = (M, R)$ называется функция $\varphi : R \to Z$, которая ставит в соответствие дуге некоторое число – вес дуги. В этих задачах фундаментальную роль играет изучение поперечных сечений дуги (т.е. множеств дуг, которые соединяют вершины двух непересекающихся множеств вершин) и нахождение ограниченного поперечного сечения, которое является самим узким местом. Эти узкие места определяют пропускную способность системы в целом.

Разрезом сети $G=(M,R)$ называется множество ее дуг, при удалении которых из сети полностью прекращается поток от источника к стоку. Отметим, что в связной сети любой разрез не пуст.

Теорема. Максимальный поток в сети равен пропускной способности минимального разреза.

Рассмотрим задачу о максимальном потоке между двумя выделенными узлами связной сети. Каждая дуга сети обладает пропускными способностями в обоих направлениях, которые определяют максимальное количество потока, проходящего по данной дуге. Ориентированная односторонняя дуга соответствует нулевой пропускной способности в запрещенном направлении.

Пропускные способности c_{ij} сети можно представить в виде матрицы $C = (c_{ij})$. Для определения максимального потока из источника S в сток T используется такой алгоритм.

Шаг 1. Найти цепь, соединяющую S с T, по которой поток принимает положительное значение в направлении $S \rightarrow T$. Если такой цепи не существует, перейти к шагу 3. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. Пусть c_{ij}^- - пропускные способности дуг цепи (S, T) в направлении $S \rightarrow T$, c_{ij}^+ - пропускные способности дуг цепи в направлении $T \rightarrow S$, $\theta = \min\limits_{i,j} (c_{ij}^-) > 0$.

Матрицу пропускных способностей изменить следующим образом:

А) вычесть θ из всех значений c_{ij}^- ;

Б) прибавить θ ко всем значениям c_{ij}^+ .

Заменить матрицу пропускных способностей (c_{ij}) на новую и перейти к шагу 1.

Операция А) дает возможность использовать остатки пропускных способностей дуг выбранной цепи в направлении $S \rightarrow T$.

Операция Б) восстанавливает исходные пропускные способности сети, так как уменьшение пропускных способностей в одном направлении приводит к увеличению пропускных способностей в противоположном направлении.

Шаг 3. Найти максимальный поток в сети. Пусть $C = (c_{ij})$ исходная матрица пропускных способностей, $C^* = (c_{ij}^*)$ – последняя матрица, получившаяся в результате преобразований матрицы C (шаг 1, шаг 2). Оптимальный поток $X = (x_{ij})$ задается так:

$$x_{ij} = c_{ij} - c_{ij}^*, \text{если } c_{ij} > c_{ij}^*, \quad x_{ij} = 0 \text{ в противном случае.}$$

Максимальный поток из S в T :

$$Z = \sum_i x_{si} = \sum_j x_{jT}.$$

Z – сумма всех положительных значений θ, определенных на шаге 2.

7. **Пример.** Сеть задается матрицей пропускных способностей C:

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	*10*	*3*	*14*	*4*	-
1	*5*	-	*5*	*9*	*5*	-
2	*5*	*6*	-	*15*	-	*10*
3	*12*	*7*	*10*	-	*7*	*2*
4	*3*	*9*	-	*8*	-	*13*
t	-	-	*3*	*4*	*5*	-

Найти максимальный поток в сети. По найденному решению построить минимальный разрез.

Решение.

В качестве исходной цепи можно выбрать цепь $s \to 1 \to 4 \to t$. Ячейки с номерами *(s, 1), (1, 4) (4, t)* помечаем знаком (-), а ячейки *(1, s), (4, 1), (4, t)* помечаем знаком (+).

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	$\mathbf{10^-}$	*3*	*14*	*4*	-
1	$\mathbf{5^+}$	-	*5*	*9*	$\mathbf{5^-}$	-
2	*5*	*6*	-	*15*	-	*10*
3	*12*	*7*	*10*	-	*7*	*2*
4	*3*	$\mathbf{9^+}$	-	*8*	-	$\mathbf{13^-}$
t	-	-	*3*	*4*	$\mathbf{5^+}$	-

Для этой цепи максимальный поток определяется как

$$\theta_1 = min\,\{c_{s1}, c_{14}, c_{4t}\} = min\{10, 5, 13\} = 5.$$

В качестве исходных данных можно выбирать различные цепи. Но хороший выбор исходной цепи должен давать наибольшее значение θ.

Скорректируем матрицу С путем вычитания θ = 5 из всех элементов помеченных знаком (-) и сложением со всеми элементами, помеченными знаком (+).

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	*5*	*3*	***14***$^-$	*4*	-
1	*10*	-	*5*	*9*	*0*	-
2	*5*	*6*	-	***15***$^+$	-	***10***$^-$
3	***12***$^+$	*7*	***10***$^-$	-	*7*	*2*
4	*3*	*14*	-	*8*	-	*8*
t	-	-	***3***$^+$	*4*	*10*	-

Выбираем цепь $s \to 3 \to 2 \to t$. Ячейки *(s, 3), (3, 2), (2, t)* помечаем знаком (-), а ячейки *(3, s), (2, 3), (t, 2)* знаком (+).

$$\theta_2 = min\,\{c_{s3}, c_{32}, c_{2t}\} = min\,\{14, 10, 10\} = 10.$$

Скорректируем матрицу *C*:

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	***5***$^-$	*3*	*4*	*4*	-
1	***10***$^+$	-	*5*	***9***$^-$	*0*	-
2	*5*	*6*	-	*15*	-	*10*
3	*22*	***7***$^+$	*0*	-	***7***$^-$	*2*
4	*3*	*14*	-	***8***$^+$	-	***8***$^-$
t	-	-	*13*	*4*	***10***$^+$	-

Выбираем цепь $s \to 1 \to 3 \to 4 \to t$, помечаем знаком (-) ячейки *(s, 1), (1, 3), (3, 4), (4, t)*, знаком (+) ячейки *(1, s), (3, 1), (4, 3), (t, 4).*

$$\theta_3 = min\,\{c_{s1}, c_{13}, c_{34}, c_{4t}\} = min\,\{5, 9, 7, 8\} = 5.$$

Корректируем матрицу *C*:

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*

s	-	*0*	*3*	*4*	$\mathbf{4}^-$	-
1	*15*	-	*5*	*4*	*0*	-
2	*5*	*6*	-	*25*	-	*0*
3	*22*	*12*	*0*	-	*2*	*2*
4	$\mathbf{3}^+$	*14*	-	*13*	-	$\mathbf{3}^-$
t	-	-	*13*	*4*	$\mathbf{15}^+$	-

Выбираем цепь $s \to 4 \to t$. Помечаем знаком (-) ячейки *(s, 4), (4, t),* знаком (+) ячейки *(4, s), (t, 4).*

$$\theta_4 = \min \{c_{s4}, c_{4t}\} = \min \{4, 3\} = 3.$$

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	*0*	*3*	$\mathbf{4}^-$	*1*	-
1	*15*	-	*5*	*4*	*0*	-
2	*5*	*6*	-	*25*	-	*0*
3	$\mathbf{22}^+$	*12*	*0*	-	*2*	$\mathbf{2}^-$
4	*6*	*14*	-	*13*	-	*0*
t	-	-	*13*	4^+	*18*	-

Выбираем цепь $s \to 3 \to t$. Ячейки *(s, 3), (3, t)* помечаем знаком (-), а ячейки *(3, s), (t, 3)* знаком (+).

$$\theta_5 = \min \{c_{s3}, c_{3t}\} = \min \{4, 2\} = 2.$$

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	*0*	*3*	*2*	*1*	-
1	*15*	-	*5*	*4*	*0*	-
2	*5*	*6*	-	*25*	-	*0*
3	*25*	*12*	*0*	-	*2*	*0*
4	*6*	*14*	-	*13*	-	*0*
t	-	-	*13*	*6*	*18*	-

Так как между *s* и *t* нельзя построить цепь, то процесс завершен и найдена оптимальная матрица пропускных способностей на последнем шаге C^* . Определим максимальный поток из *s* в *t*. Построим матрицу *X*:

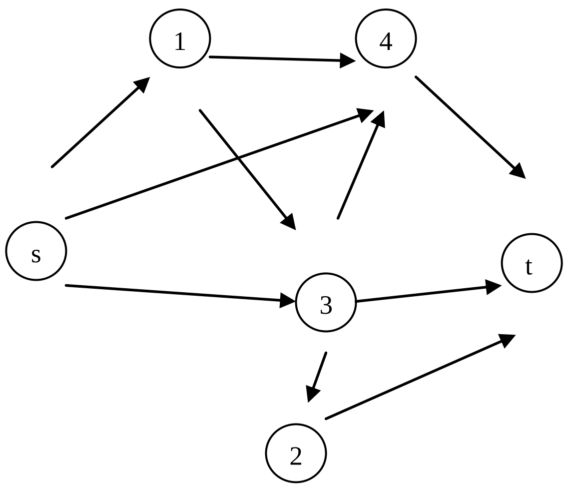
$x_{ij} = c_{ij} - c^*_{ij}$,если $c_{ij} > c^*_{ij}$, x_{ij} = 0 в противном случае.

	s	*1*	*2*	*3*	*4*	*t*
s	-	*10*	-	*12*	*3*	-
1	-	-	-	*5*	*5*	-
2	-	-	-	-	-	*10*
3	-	-	*10*	-	*5*	*2*
4	-	-	-	-	-	*13*
t	-	-	-	-	-	-

Максимальный поток из *s* в *t*:

$$Z = \sum_i x_{si} = \sum_j x_{jT} = 10 + 2 + 13 = 25.$$

По найденному решению построим минимальный разрез. Разрез в связной цепи - множество дуг, которое определяет нулевой поток из *s* в *t* , если пропускные способности этих дуг полагаются равными нулю. Построим минимальный разрез по матрице *X*.



Тема 7. Алгоритм Форда-Беллмана нахождения минимального пути

Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути

Для ненагруженного графа введем понятие ***кратчайшего пути.*** Это путь с минимальным общим числом дуг, причем каждая дуга считается столько раз, сколько она содержится в этом пути.

Пусть $G=(X,R)$ - взвешенный граф, имеющий n вершин и матрицу весов $W=(w_{ij})$. Опишем некоторый алгоритм нахождения взвешенного расстояния от фиксированной вершины $x_i \in X$ (называемой **источником**) до всех остальных вершин графа $G=(X,R)$.

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров с отрицательным весом, поскольку, двигаясь по такому контуру достаточное количество, раз, можно получить маршрут, имеющий вес, меньший любого заведомо взятого числа, и тем самым задача нахождения расстояния становится бессмысленной.

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма Форда - Беллмана являются величины $□_j(k)$, где $i = 1, 2, \dots, n$ (n – число вершин графа); $k = 1, 2, \dots, n-1$. Для фиксированных i и k величина $□_j(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более k дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить $k = 0$. Положить $□_i(0) = \infty$ для всех вершин, кроме x_1; положить $□_1(0) = 0$.

Шаг 3. В цикле по k, $k = 1, \dots, n-1$, каждой вершине x_i на k-ом шаге приписать индекс $□_i(k)$ по следующему правилу:

$$□_i(k) = \min_{1 \le j \le n} \{□_j(k-1) + c_{ji}\} \qquad (4.1)$$

для всех вершин, кроме x_1, положить $□_1(k) = 0$.

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов $□_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. При этом $□_i(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для любой вершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$$\square_r(n-2) + c_{rs} = \square_s(n-1), \qquad x_r \in G^{-1}(x_s),$$

где $G^{-1}(x_s)$ - прообраз вершины x_s.

Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$$\square_q(n-3) + c_{qr} = \square_r(n-2), \qquad x_q \in G^{-1}(x_r),$$

где $G^{-1}(x_r)$ - прообраз вершины x_r, и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i , найдем минимальный путь.

С помощью алгоритма Форда - Беллмана найдем минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рис. 4.12.

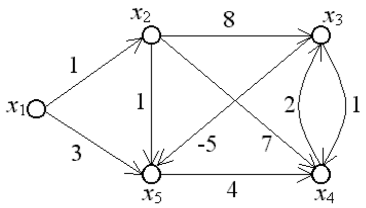


Рис. 12. Заданный ориентированный граф

Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда – Беллмана для этого случая. Значения индексов $\square_i(k)$ будем заносить в таблицу индексов (таблица 4.2).

Шаг 1. Введем число вершин графа n =5. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$, $\square_1(0) = 0$, $\square_2(0) = \square_3(0) = \square_4(0) = \square_5(0) = \infty$. Эти значения занесем в первый столбец таблицы 4.2.

Шаг 3. $\underline{k = 1}$. $\square_1(1) = 0$.

Равенство (4.1) для $k = 1$ имеет вид:

$$\square_i(1) = \min_{1 \le j \le 5} \{\square_j(0) + c_{ji}\}.$$

$\square_2(1) = min\{\square_1(0) + c_{12};\ \square_2(0) + c_{22};\ \square_3(0) + c_{32};\ \square_4(0) + c_{42};\ \square_5(0) + c_{52};\} = min\{0 + 1;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty\} = 1.$

$\square_3(1) = min\{\square_1(0) + c_{13};\ \square_2(0) + c_{23};\ \square_3(0) + c_{33};\ \square_4(0) + c_{43};\ \square_5(0) + c_{53};\} = min\{0 + \infty;\ \infty + 8;\ \infty + \infty;\ \infty + 2;\ \infty + \infty\} = \infty$.

$\square_4(1) = min\{\square_1(0) + c_{14};\ \square_2(0) + c_{24};\ \square_3(0) + c_{34};\ \square_4(0) + c_{44};\ \square_5(0) + c_{54};\} = min\{0 + \infty;\ \infty + 7;\ \infty + 1;\ \infty + \infty;\ \infty + 4\} = \infty$.

$\square_5(1) = min\{\square_1(0) + c_{15};\ \square_2(0) + c_{25};\ \square_3(0) + c_{35};\ \square_4(0) + c_{45};\ \square_5(0) + c_{55};\} = min\{0 + 3;\ \infty + 1;\ \infty - 5;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty\} = 3.$

Полученные значения $\square_i(1)$ занесем во второй столбец таблицы 4.2. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\square_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i- ую, содержащего не более одной дуги.

$\underline{k = 2.}$

$\square_1(2) = 0.$

Равенство (4.1) для $k = 2$ имеет вид:

$$\square_i(2) = \min_{1 \le j \le 5} \{\square_j(1) + c_{ji}\}.$$

$\square_2(2) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty;\ 3 + \infty\} = 1.$

$\square_3(2) = min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ \infty + \infty;\ \infty + 2;\ 3 + \infty\} = 9$.

$\square_4(2) = min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ \infty + 1;\ \infty + \infty;\ 3 + 4\} = 7$.

$\square_5(2) = min\{0 + 3;\ 1 + 1;\ \infty - 5;\ \infty + \infty;\ 3 + \infty\} = 2.$

Полученные значения $\square_i(2)$ занесем в третий столбец таблицы 4.2. Величины $\square_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более двух дуг.

$\underline{k = 3.}$

$\square_1(3) = 0.$

Равенство (4.1) для $k = 3$ имеет вид:

$$\square_i(3) = \min_{1 \le j \le 5} \{\square_j(2) + c_{ji}\}.$$

$\square_2(3) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ 9 + \infty;\ 7 + \infty;\ 2 + \infty\} = 1.$

$\lambda_3(3) = min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ 9 + \infty;\ 7 + 2;\ 2 + \infty\} = 9$.

$\lambda_4(3) = min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ 9 + 1;\ 7 + \infty;\ 2 + 4\} = 6$.

$\lambda_5(3) = min\{0 + 3;\ \ 1 + 1;\ 9 - 5;\ 7 + \infty;\ 2 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец таблицы 4.2. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более трех дуг.

<u>k = 4.</u>

$\lambda_1(4) = 0$.

Равенство (4.1) для $k = 4$ имеет вид:

$$\lambda_i(4) = \min_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(3) + c_{ji}\}.$$

$\lambda_2(4) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ 9 + \infty;\ 6 + \infty;\ 2 + \infty\} = 1$.

$\lambda_3(4) = min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ 9 + \infty;\ 6 + 2;\ 2 + \infty\} = 8$.

$\lambda_4(4) = min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ 9 + 1;\ 6 + \infty;\ 2 + 4\} = 6$.

$\lambda_5(4) = min\{0 + 3;\ \ 1 + 1;\ 9 - 5;\ 6 + \infty;\ 2 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец таблицы 2. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более четырех дуг.

Таблица 2 – вычисление $\lambda_i(k)$, где $\lambda_i(k)$ - длина минимального пути из первой вершины в i-ую, который содержит не более k дуг)

I (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (4.1) полученного при s =3:

$$\square_r(3) + c_{r3} = \square_3(4), \qquad x_r \in G^{-1}(x_3),$$

где $G^{-1}(x_3)$ - прообраз вершины x_3.

$$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}.$$

Далее подставим последовательно r = 2 и r = 4, чтобы определить, для какого значения r это равенство выполняется:

$$\square_2(3) + c_{23} = 1 + 8 \neq \square_3(4) = 8,$$

$$\square_4(3) + c_{43} = 6 + 2 = \square_3(4) = 8.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3, является вершина x_4.

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (4.1) полученного при s =4:

$$\square_r(2) + c_{r4} = \square_4(3), \qquad x_r \in G^{-1}(x_4),$$

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4.

$$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

Также подставим последовательно r = 2, r = 3 и r = 5, чтобы определить то значение r, для которого это равенство выполняется:

$\square_2(2) + c_{24} = 1 + 7 \neq \square_4(3) = 6,$

$\square_3(2) + c_{34} = 1 + 1 \neq \square_4(3) = 6,$

$\square_5(2) + c_{54} = 2 + 4 = \square_4(3) = 6,$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4, является вершина x_5.

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (4.1) полученного при s =5:

$$\square_r(1) + c_{r5} = \square_5(2), \qquad x_r \in G^{-1}(x_5),$$

где $G^{-1}(x_5)$ – прообраз вершины x_5.

$$G^{-1}(x_5) = \{x_1, x_2\}.$$

Далее подставим последовательно r = 1 и r = 2, чтобы определить то значение r, для которого это равенство выполняется:

$\square_1(1) + c_{15} = 0 + 3 \neq \square_5(2) = 2,$

$\square_2(1) + c_{25} = 1 + 1 = \square_5(2) = 2,$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5, является вершина x_2.

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (4.1) полученного при s =2:

$$\square_r(0) + c_{r2} = \square_2(1), \qquad x_r \in G^{-1}(x_2),$$

где $G^{-1}(x_2)$ – прообраз вершины x_2.

$$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}.$$

Подставим r = 1, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$$\square_1(0) + c_{12} = 0 + 1 = \square_2(1) = 1.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2, является вершина x_1.

Итак, найден минимальный путь, соединяющий вершины x_1 и x_3: x_1, x_2, x_5, x_4, x_3, его длина равна 8.

Отметим, что для реализации алгоритма Форда – Беллмана требуется n^3 операций. Более экономичным является алгоритм Дейкстры, для реализации которого требуется n^2 операций.

Тема 8. Основы теории принятия решений

Теория принятия решений представляет собой набор понятий и систематических методов, позволяющих проанализировать проблемы принятия решений в условиях неопределённости. Основой построения теории принятия решений служит набор аксиом, которыми руководствуется лицо, принимающее решение.

В основе принятия решений лежит предположение о том, что выбор альтернатив должен определяться двумя факторами:

1)представлениями лица, принимающего решение о вероятностях различных исходов, которые могут иметь место при выборе того или иного варианта решения;

2) предпочтениями, отдаваемыми им различным исходам.

При принятии решений можно выделить четыре основных этапа.

1. Определение альтернативных способов действия. Необходимо задать подходящий набор целей, а также механизм достижения этих целей, указать, как развивается изучаемый процесс во времени, описать способ сбора информации.

2. Описание вероятностей возможных исходов. При этом необходимо, чтобы неопределённость, связанная с альтернативными решениями, была выражена численно через распределение вероятностей. В результате такой операции становится известной вероятность каждого возможного исхода для каждого принятого решения.

3. Ранжировка предпочтений возможных исходов через их полезность. При этом выбирают меру эффективности и с её помощью представляют в числовой форме как отношение лица, принимающего решение, к исходам, так и вероятности возможных исходов.

4. Рациональный синтез информации, полученной на первых трёх этапах. Следует провести анализ и эффективно использовать всю полученную информацию, для того чтобы решить, какой из возможных альтернатив отдать предпочтение.

Теория принятия решений предписывает лицу, принимающему решение, нормы поведения, которым он должен следовать, чтобы не вступить в противоречие со своими собственными суждениями и предпочтениями. Эта теория помогает лицу, принимающему решение, принимать сложные решения с учётом субъективных факторов. С ростом сложности задачи уменьшается способность человека к неформальной обработке всей информации в соответствии с его собственными суждениями и предпочтениями. В таких ситуациях теория принятия решений имеет преимущества перед аналитическими подходами, т. к. включает в формализованном виде субъективные факторы.

Типичные задачи принятия решений имеют много особенностей, перечислим основные из них.

1. Многоцелевой характер. При решении сложных задач имеет место стремление к достижению различных целей. Эти цели почти всегда противоречивы, т.е. достижение некоторой одной цели приводит к ухудшению результатов по другим, поэтому возникает проблема выбора между противоречивыми целями.

2. Фактор времени. В основном, последствия принятия решения проявляются не сразу. Например, при производстве нового вида продукции приходится рисковать значительными суммами в течение нескольких лет.

3. Неформализуемые понятия. Субъективный подход к решению проблем существенным образом усложняет решение задач. Примерами неформализуемых понятий, которыми оперирует лицо, принимающее решение, могут быть престиж, волнение, страдание, политические действия и т.д.

4. Неопределённость. В момент принятия решения, как правило, неизвестны последствия каждой из альтернатив.

5. Возможность получения информации. Зачастую при принятии решений нужная информация либо отсутствует, либо является неполной. Например, можно проанализировать рыночную конъюнктуру, затем оценить спрос на новый вид продукции; провести медицинские обследования, которые облегчат диагностику заболевания и последующее лечение, и т.п., но получение такой информации может потребовать много времени и повлечёт за собой большие материальные затраты, к тому же она может быть недостаточно точной.

6. Коллективное принятие решений. Часто решение приходится принимать группе людей. В таких ситуациях нельзя строго разграничить функции и ответственность лиц, принимающих решение по некоторым вопросам.

Теория принятия решения позволяет проводить анализ всех этих вопросов независимо и даёт схему последующего синтеза информации с целью выработки наилучшего способа действия.

Трудно проследить путь развития теории принятия решений, т.к. в течение длительного периода времени менялось как содержание теории, так и название. В основу положены такие понятия, как субъективная вероятность и полезность.

Современная теория полезности для принятия решений в условиях неопределенности разработана независимо двумя авторами – фон Нейманом и Моргенштерном. Они постулировали ряд аксиом и показали, что каждому возможному исходу можно поставить в соответствие некоторую полезность. Согласно этим аксиомам, лицо, принимающее решение, всегда должно выбирать альтернативу с максимальной ожидаемой полезностью. Этот результат называют гипотезой ожидаемой полезности.

В 1950г. появилась работа Вальда по статистическим проблемам принятия решений на основе теорем теории игр.

После создания основ теории её начали применять к решению задач, включающих различные неопределённости и возможности для получения выборки или экспериментирования. В результате образовалась байесовская или статистическая теория принятия решений. В начале 60-х гг. теория получила применение для решения и анализа реальных проблем, связанных с факторами неопределённости, это позволило понять применимость теории статистических решений к широкому классу задач. В 1966г. в литературе появился термин *теория принятия решений*.

Теория принятия решений находит применение в различных сферах: анализ капиталовложений, выпуск новых видов продукции, американские исследования Марса с помощью автоматических станций, возможности использования ядерной энергии в энергетической системе Мексики, решение управленческих проблем для фирм: анализ такой проблемы как приобретение, объединение, инвестиционная политика фирмы и производственное планирование. В последние годы проводятся исследования по задачам принятия решений на правительственном уровне. Среди них такие задачи, как обнаружение очагов возникновения ураганов, создание столичного аэропорта в г. Мехико.

Тема 9. Принятие решений в детерминированных условиях. Обзор методов

Процесс принятия решений должен содержать как минимум следующие этапы:

1) содержательная постановка задачи;

2) формализация задачи;

3) математическая постановка (математическая модель);

4) анализ математической модели и выбор метода решения;

5) разработка алгоритма решения задачи;

6) анализ результатов и принятие решения.

При принятии решений в условиях определённости можно дать строгую математическую постановку задачи. Пусть имеет место некоторое действие, исход которого зависит от альтернативных стратегий лица принимающего решение, и некоторых неслучайных

факторов, полностью определённых. Стратегии могут быть представлены в виде значений *n*-мерного вектора $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, на компоненты которого накладывается ряд ограничений, связанных со смыслом поставленной задачи.

Для решения детерминированных задач принятия решений используются следующие методы.

1. Классические методы математического анализа:

а) задача отыскания безусловного экстремума;

б) задача отыскания условного экстремума с ограничениями.

2. Неклассические задачи математического программирования:

а) специальные задачи, для их решения разработаны специальные методы решения, например, задача линейного программирования, решается симплекс-методом;

б) неспециальные задачи, они решаются с помощью неспециальных методов поиска экстремума (прямые методы поиска экстремума).

Эти методы являются универсальными в том смысле, что при их разработке не учитывались специфические особенности конкретной задачи оптимизации, а лишь самые общие моменты, связанные с поиском экстремума.

Тема 10. Принятие решений в условиях риска

Риск в переводе с итальянского языка – опасность, угроза. Адекватного определения риска не существует.

Будем понимать под риском «ответственность за принятое решение». В конкретных ситуациях понятию риска будем давать количественные определения.

В задачах принятия решения в условиях риска прибегают к приёму сведения задачи к детерминированной. Этот приём может быть основан на двух различных принципах:

1) искусственное сведение к детерминированной задаче;

2) оптимизация в среднем.

Первый приём сводится к тому, что неопределённая, вероятностная характеристика приближенно заменяется детерминированной. Для этого все случайные факторы в задаче приближенно заменяются неслучайными значениями, в результате задача преобразуется в детерминированную.

Этот приём применяется в грубых, ориентировочных расчётах, когда диапазон возможных значений случайных величин достаточно мал, такой прием получил широкое применение при решении задач принятия плановых решений с использованием методов сетевого планирования и управления.

Второй приём является более сложным. Он применяется в тех ситуациях, когда разброс случайных факторов велик, замена этих факторов математическими ожиданиями может привести к значительным ошибкам.

Суть этого приёма заключается в том, что показатель эффективности (прибыль, затраты) заменяется его средним значением.

Этот приём основывается на 4-х критериях:

1) ожидаемого значения (прибыли или расходов);

2) комбинации ожидаемого значения и дисперсии;

3) известного предельного уровня;

4) наиболее вероятного события в будущем.

Рассмотрим эти критерии более подробно.

Критерий ожидаемого значения. Этот критерий обусловлен стремлением максимизировать ожидаемую прибыль или минимизировать ожидаемые издержки. Количественно этот критерий можно выразить в денежных единицах или в единицах полезности денег.

Использование критерия ожидаемых величин применяют в случае, когда одно и то же решение приходится принимать достаточно большое число раз, что приводит к наилучшему в среднем результату, т.к. при многократном повторении действий различия сглаживаются. Всякая другая стратегия даст более плохой результат в среднем.

Пусть z − случайная величина, $M(z)$ – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия.

Если $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ – случайная выборка объема n, то выборочное среднее

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$$

В теории принятия решений условия, в которых принимается решение, называют состояниями природы, возможные реализации которых являются случайными событиями. В общем случае задача принятия решений может включать n состояний природы и m альтернатив. Если p_j – вероятность j-го состояния природы, а a_{ij} – платёж, связанный с принятием решения i при состоянии природы j $(j=1,2,\dots,n,\ i=1,2,\dots,m)$, тогда ожидаемый платёж для решения i вычисляют так:

$$MV_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n,\ i = 1,2,\ldots,m,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Наилучшим решением будет то, которое соответствует

$$MV^* = \max_i(MV_i)\ \text{или}\ MV_i^* = \min_i(MV_i),$$

в зависимости от смысла решаемой задачи.

Если решается простая задача с наличием конечного числа альтернатив и точных значений платежей, то эта задача может быть представлена в виде *дерева решений*.

Критерий «комбинации ожидаемого значения и дисперсии». Критерий ожидаемого значения применим в случаях, когда одно и тоже решение принимается достаточно большое число раз. Этот критерий можно модифицировать и для редко повторяющихся ситуаций.

Пусть z − случайная величина с дисперсией σ^2, тогда среднее значение $\bar{z}$ имеет дисперсию $\frac{\sigma^2}{n}$, где n − объём выборки.

Если σ^2 уменьшается, то дисперсия $\bar{z}$ равная $\frac{\sigma^2}{n}$ также уменьшается, а вероятность того, что $\bar{z}$ совпадает с $M(z)$ увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемой прибыли сочетается с минимизацией ее дисперсии:

$$M(z) - KD(z) \rightarrow \max$$

где z − случайная величина, представляющая прибыль, $D(z)$ − дисперсия z, K − const.

Константа K интерпретируется как «несклонность к риску». Например, предприниматель, неприемлющий большие отклонения прибыли от $M(z)$ в сторону убывания, может выбрать $K \geq 1$, это придает больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

Этот критерий согласуется с использованием полезности при принятии решений, так как параметр K характеризует отношение лица, принимающего решение, к большим отклонениям от ожидаемых значений.

Критерий наиболее вероятного исхода. Этот критерий основан на преобразовании случайной ситуации в детерминированную путем замены случайной величины единственным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации.

Пусть доход от изделия j равен c_j и $p_j(c_j)$ – дискретная плотность распределения c_j. Пусть c_j^*: $p_j(c_j^*) = \max p_j(c_j)$ для всех c_j, тогда c_j^* можно рассматривать как детерминированное значение дохода от изделия j.

Этот критерий − упрощение более сложного правила принятия решений в условиях риска.

Тема 11. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерий Сэвиджа

В условиях неопределённости никакие вероятностные характеристики не известны. При этом возможны два случая:

1) вероятности возможных исходов не имеют физического смысла, т.е. имеются неопределённые факторы нестохастической природы, которые не могут быть описаны в терминах теории вероятностей;

2) вероятности возможных исходов имеют физический смысл, но либо вовсе неизвестны, либо известны с недостаточной точностью для принятия решений, что соответствует факторам стохастической природы, неопределённость в отношении которых обусловлена их недостаточной изученностью.

Характер причины, вызывающей неопределённость нестохастической природы, дает две группы неопределённостей:

1. Стратегические неопределённости - неопределённые факторы, появляющиеся из-за того, что в принятии решений участвуют лица, которые имеют несовпадающие цели, а также неизвестны стратегии поведения этих лиц.

2. Концептуальные неопределённости - неопределённые факторы, сопутствующие принятию сложных решений, имеющих долговременные последствия, и связанные с нечеткими представлениями лица принимающего решение о своих целях и целях противника. Такие неопределённости часто встречаются в экономических и социально- экономических исследованиях.

Стохастические неопределённости называют еще природными неопределённостями, т.к. они появляются из-за недостаточной изученности природных явлений.

Задачи принятия решений при наличии стратегических неопределённостей называют многосторонними из-за присутствия противника, что создает конфликтную ситуацию при принятии решения, поэтому такие задачи называют еще задачами принятия решений в условиях конфликтной ситуации или конфликтными задачами принятия решений.

Конфликтные задачи подразделяются на одноуровневые и многоуровневые. В одноуровневых задачах противники не связаны между собой никакими формами подчинения, они действуют на одном уровне власти. Многоуровневые задачи возникают в сложных системах управления, имеющих иерархическую структуру.

Одноуровневые конфликтные задачи могут быть антагонистическими и неантагонистическими. Если противники имеют прямо противоположные цели, то задача является антагонистической. Очевидно, что многоуровневые задачи не являются антагонистическими.

При решении одноуровневых конфликтных задач принятия решений в условиях неопределённости используется аппарат теории игр и минимакса (максимина). Иерархические конфликтные задачи представляют наименее изученный класс задач.

Методы теории игр разработаны применительно к специфическим конфликтным ситуациям, когда принятие решения многократно повторяется.

Теорема (критерий Сэвиджа). Критерий Сэвиджа характеризуют аксиомы 1-4, 7, 8, 10.

Доказательство. Можно показать, что критерий Сэвиджа удовлетворяет всем десяти аксиомам, за исключением аксиомы 6 (присоединение строки).

Для доказательства единственности преобразуем матрицу A к виду $((r_{i\,j}))$, что возможно сделать в силу аксиомы 7, добавим к преобразованной матрице нулевую строку. В каждом столбце матрицы $((r_{ij}))$ имеется хотя бы один нулевой элемент, поэтому в силу аксиомы 10 добавление нулевой строки не меняет упорядоения альтернатив. Из полученной матрицы можно удалить строку, если в ней остается нулевая строка, или добавить любую неотрицательную строку по аксиоме 10. Этого достаточно, чтобы воспользоваться леммой 1, т.к. нулевая строка при перестановках не меняется. Аналогичным образом выполняется и лемма 2. Завершение доказательства аналогично соответствующей части доказательства критерия Вальда.

Минимаксный критерий настолько пессимистичен, что может приводить к нелогичным выводам.

Критерий Сэвиджа корректирует ситуацию с помощью новой матрицы потерь $r_{ij} = r(a_i, \Theta_j)$, которая называется матрицей «сожалений».

$$r_{ij} = a_{ij} - \max_k a_{lj} \le 0,$$

эта матрица показывает, сколько лицо, принимающее решение теряет из-за незнания истинного состояния природы, к этой матрице применяется максиминный (минимаксный) критерий. Критерий Сэвиджа в силу этого иногда называют критерием максиминного сожаления.

Рассмотрим применение этой теоремы в конкретных ситуациях.

$$r_{ij} = r(a_i, \Theta_j) = \begin{cases} \max_{ak}(v(a_k, \Theta_j) - v(a_i, \Theta_j)), & \text{если} \quad v - \text{доход}, \\ v(a_i, \Theta_j) - \min_{ak}(v(a_k, \Theta_j)), & \text{если} \quad v - \text{потери}. \end{cases}$$

$r(a_i, \Theta_j)$ определяет разность между наилучшим значением в столбце Θ_j и значением $v(a_i, \Theta_j)$ для того же Θ_j, т.е. $r(a_i, \Theta_j)$ выражает сожаление о том, что лицо, принимающее решение не выбрало наилучшего действия относительно состояния Θ_j. В связи с этим функцию $r(a_i, \Theta_j)$ называют матрицей сожаления.

Функция сожаления $r(a_i, \Theta_j)$ всегда определяет потери независимо от того, является ли функция $v(a_i, \Theta_j)$ доходом или потерями.

Тема 12. Введение в имитационное моделирование

При исследовании сложных систем в настоящее время широко используется имитационное моделирование. Этот инструмент дает эффективные результаты при недостаточной информации о функционировании исследуемой системы или полном ее отсутствии.

Имитационное моделирование (статистическое моделирование на ЭВМ) – это способ исследования поведения вероятностных систем (экономических, технических и т.п.) в условиях, когда не известны в полной мере внутренние взаимодействия в этих системах.

Этот метод заключается в воспроизведении (имитации) исследуемого процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении характеристик этого процесса. Одно такое воспроизведение функционирования системы называют реализацией или испытанием. После каждого испытания регистрируют совокупность параметров, характеризующих случайный исход реализации. Метод основан на многократных испытаниях построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения числовых характеристик исследуемого процесса в виде статистических оценок его параметров. Процесс моделирования функционирования экономической системы сводится к машинной имитации процесса.

Имитационное моделирование не решает оптимизационных задач, а представляет собой технику оценки значений функциональных характеристик моделируемой системы.

Результаты исследования имитационной модели представляют собой оценки значений операционных характеристик той системы, поведение которой моделируется. Например, при имитационном моделировании любой системы массового обслуживания практический интерес могут представлять такие характеристики как средняя продолжительность обслуживания клиента, средняя длина очереди, доля времени простоя системы и другие.

Имитационное моделирование является эффективным средством для решения сложных проблем. Имитационное моделирование применяется в различных областях науки, техники, экономики и т.д. С помощью имитационного моделирования можно решать такие задачи:

1. Задачи в различных областях естественных наук (математика, физика, химия):

а) вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми, вычисление кратных интегралов;

б) вычисление констант (например, числа π);

в) обращение матриц;

г) изучение диффузных процессов.

2. Практические задачи:

а) производственно-технологические задачи, возникающие в процессе создания систем массового обслуживания, систем связи, в сфере управления запасами, при анализе химических процессов;

б) экономические и коммерческие задачи, включая оценки поведения потребителя, определение цен, экономическое прогнозирование деятельности фирм;

в) социальные и социально-психометрические задачи, например, проблемы динамики народонаселения, влияния экологии на здоровье, эпидемиологических исследований, а также прогнозирование группового поведения;

г) задачи биомедицинских систем, например, баланса жидкости в организме человека, размножения клеток крови, деятельности мозга;

д) задачи анализа той или иной военной стратегии и тактики.

Вычисление результатов имитации базируется на случайной выборке, т.е. любой результат, полученный путем имитационного моделирования, подвержен экспериментальным ошибкам, поэтому, как и в любом статистическом эксперименте, должен основываться на результатах статистических проверок.

1.1. Основные этапы построения имитационных моделей

Имитационное моделирование является эффективным инструментом для решения сложных проблем. На предварительном этапе построения имитационной модели необходимо:

1. Исследовать границы и структуру рассматриваемой системы с целью решения конкретных проблем. На этом этапе используются методы системного анализа, например, строится граф целей и задач, который имеет иерархическую структуру. На каждом уровне расположены некоторые задачи, которые необходимо решить для достижения целей более высокого уровня. Построение такого графа начинается с верхнего уровня – формулировки конечных целей. Далее формируется уровень задач, которые необходимо решить для достижения этих целей. Постепенно формулируется проблема, для решения которой строится имитационная модель.

Этот этап завершается построением концептуальной модели исследуемой системы или процесса. Степень формализации концептуальной модели зависит от сложности системы.

2. На этом этапе определяются и анализируются критические элементы, компоненты, точки в исследуемой системе или процессе, а также определяются оценки предполагаемых решений.

При имитационном моделировании кроме основной модели строится блок упрощенных моделей, предназначенных для предварительного грубого анализа проблемы в целом. Методы упрощения моделей основаны на теории агрегирования, которая позволяет уменьшить число переменных и соотношений. Большую роль при этом играют асимптотические метода, которые позволяют выделить переменные, влияющие на общий ход процесса.

3. На этом этапе осуществляется прогнозирование и планирование будущего развития исследуемой системы или процесса.

Принятие решений в имитационном моделировании основано на последовательном сжатии множества рассматриваемых вариантов путем отбрасывания неконкурентоспособных или неосуществимых альтернатив.

Таким образом, для оценки и прогноза развития исследуемой системы предполагается: построить концептуальную модель; построить математическую модель; разработать математическое обеспечение для расчетов на ЭВМ; провести эксперименты на ЭВМ и определить применимость модели.

Известно, модель – это некоторое описание системы или процесса. В фундаментальных науках модели разрабатываются на основе теоретических законов:

1) иконические модели – это масштабированные объекты;

2) абстрактные (математические) модели представляются совокупностью математических соотношений;

3) визуальные модели представляют системы графическим материалом.

Разработка модели существенно упрощается, если:

1) известны законы, описывающие функционирование системы;

2) может быть разработано графическое представление системы;

3) можно управлять входами и выходами системы.

Процесс построения модели можно разбить на этапы:

Этап 1.

На этом этапе предполагается осуществление таких шагов:

1) определение цели построения модели;

2) определение границ системы;

3) определение необходимого уровня детализации процессов, этот уровень должен позволять абстрагироваться от неточно определенных аспектов функционирования реальной системы.

Этап 2.

На этом этапе строится модель, в которую включаются критерии эффективности функционирования системы и оцениваемые альтернативные решения, которые рассматриваются как часть модели.

Этап 3.

На этом этапе необходимо получить оценки для альтернативных решений. Обычно оценки альтернатив требуют внесения изменений в описание системы, а, следовательно, перестройки модели. На практике процесс построения модели является итеративным.

Этап 4.

Реализация построенной модели. После того как на основе полученных оценок альтернатив выработаны рекомендации, результаты моделирования можно внедрять в практику.

Изложенный общий подход к построению модели полностью можно перенести и на имитационное моделирование.

Процесс последовательной разработки имитационной модели начинается с создания простой модели, которая затем постепенно усложняется в соответствии с требованиями, предъявляемыми решаемой проблемой. В процессе построения имитационной модели можно выделить такие этапы:

1) Формулирование проблемы: описание исследуемой проблемы и определение целей исследования.

2) Разработка модели: логико-математическое описание моделируемой системы.

3) Подготовка данных: идентификация, спецификация, сбор данных.

4) Трансляция модели: перевод модели на язык, приемлемый для ЭВМ.

5) Верификация модели: установление правильности программных продуктов для реализации модели на ЭВМ.

6) Валидация: оценка требуемой точности и соответствия имитационной модели реальной системе.

7) Стратегическое и тактическое планирование: определение условий проведения машинного эксперимента с имитационной моделью.

8) Экспериментирование: прогон имитационной модели на ЭВМ для получения требуемой информации.

9) Анализ результатов: изучение результатов имитационного моделирования для подготовки выводов и рекомендаций по решению проблемы.

10) Реализация и документирование: реализация рекомендаций, полученных на основе имитации, составление документации по модели и ее использованию.

1.2. Методологические подходы в имитационном моделировании

При разработке имитационной модели необходимо выбрать методологический подход, в рамках которого описываются функциональные взаимосвязи моделируемой системы. Этот подход позволяет разработчику четко описать поведение исследуемой системы.

Понятие системы можно трактовать, например, таким образом: система – это совокупность элементов, принадлежащих ограниченной части реального мира. Совокупность элементов может рассматриваться как часть более сложной системы, т.е. в качестве подсистемы, а в другом случае может рассматриваться как система. Сфера действия любой системы определяется целью исследования, для достижения которой она выделяется и идентифицируется. Сфера действия любой имитационной модели определяется особенностями той проблемы, для решения которой она разработана.

Для определения сферы действия системы надо выявить границы системы и ее структуру. При установлении границ системы выявляются все взаимосвязи между ее элементами. На систему могут воздействовать некоторые внешние факторы. Если они существенно влияют на систему, то систему следует переопределить. Если внешние факторы несущественно воздействуют на систему, то можно расширить определение системы, включив в нее эти факторы; пренебречь ими; трактовать их как входы в систему.

Внешние факторы трактуются как входы в систему, если они задаются определенными значениями, таблицами, уравнениями. Например, при разработке модели производственной системы фирмы сбыт продукции рассматривается как вход в систему, если в модель не включаются взаимосвязи, относящиеся к процессу сбыта. Такая модель будет содержать только статистическое описание предшествующих и предполагаемых продаж, используемое в качестве входа, т.е. организация сбыта находится за границей системы. В системной терминологии объекты, находящиеся за границами системы, но оказывающие влияние на нее, формируют окружающую среду этой системы.

Таким образом, система представляет собой совокупность взаимодействующих элементов, которые подвергаются воздействию внешней среды.

Имитационная модель обычно связана с исследованием реально существующей системы, поведение которой является функцией времени. Существует три типа имитационных моделей.

1. *Непрерывные модели*. Непрерывные модели используются для систем, поведение которых изменяется непрерывно во времени. Цель имитационного эксперимента – определить реакцию переменной состояния в зависимости от имитационного времени. Модели непрерывных систем определяются в терминах производных функций, так как иногда легче задать выражение для определения скорости изменения переменной состояния, чем это сделать непосредственно для самой переменной состояния, то есть они описываются дифференциальными уравнениями. Типичным примером непрерывной имитационной модели является изучение динамики народонаселения мира. Непрерывные имитационные модели обычно представляются в виде разностно-дифференциальных уравнений, которые описывают взаимодействие между различными элементами системы.

2. *Дискретные модели*. В этих моделях описываются системы, поведение которых изменяется лишь в заданные моменты времени. Типичным примером такой модели является очередь, когда задача моделирования состоит в оценивании операционных характеристик системы массового обслуживания таких как, например, среднее время ожидания или средняя длина очереди.

Те моменты времени, когда в системе происходят изменения, определяют события модели, например, приход или выбытие клиента. Эти события происходят в дискретные моменты времени, поэтому имеет место процесс с дискретным временем, а соответствующая имитационная модель – дискретная.

3. *Комбинированные дискретно-непрерывные* модели. В комбинированных моделях независимые переменные могут изменяться как дискретно, так и

непрерывно. Исследуемая система в таких ситуациях описывается с помощью элементов и переменных состояния. Поведение системы имитируется путем вычисления значений переменных состояния через небольшие отрезки времени.

В комбинированных моделях рассматриваются два типа событий: временные события (события, свершение которых планируется в определенные моменты времени) и события состояния (эти события не планируются, а происходят тогда, когда система достигает определенного состояния). Понятие «событие состояния» аналогично понятию «сканирование активностей», в котором событие также не планируется, а определяется состоянием системы. Возможность возникновения события состояния должна проверяться при каждом продвижении имитационного времени.

Тема 13. Моделирование систем массового обслуживания

Для определения оценок качества функционирования СМО используется метод Монте-Карло. Основой решения задачи исследования процессов, протекающих в реальных СМО, является статистическое моделирование входного потока заявок, потока обслуженных заявок.

Для построения ИМ функционирования СМО должны быть заданы такие исходные данные:

1. описание СМО - тип, параметры, критерии эффективности работы СМО;
2. параметры распределения случайной величины числа поступлений заявок в СМО или длин интервалов времени между двумя последовательными поступлениями заявок;
3. параметры закона распределения времени пребывания заявки в очереди для СМО с отказами;
4. параметры распределения случайной величины числа обслуженных системой заявок или распределения длин временных интервалов между двумя последовательно обслуженными заявками.

Решение задачи ИМ функционирования СМО имеет такие этапы:

1. Генерируется выборка псевдослучайных чисел, равномерно распределённых на отрезке *[0;1]*.

2. Полученную выборку преобразуют в выборку псевдослучайных чисел с заданным законом распределения:

интервалы времени между двумя последовательными поступлениями в систему заявок – Δt_{Ti};

время извлечения заявки из очереди для СМО с отказами;

продолжительность времени обслуживания заявки сервисами (Δt_{0i}).

3. Определяют моменты наступления событий:

1) поступление заявки на обслуживание;

2) уход заявки из очереди;

3) окончание обслуживания заявки в сервисах системы.

4. Моделируют функционирование СМО в целом и накапливают статистические данные о процессе обслуживания.

5. Устанавливают новый момент поступления заявки в СМО, и вычислительная процедура повторяется.

6. Определяют показатели качества функционирования СМО путём обработки результатов моделирования методами математической статистики.

Моделирование СМО с отказами

Пусть система имеет два однотипных сервиса, работающих с отказами, причём моменты времени окончания обслуживания на первом сервисе обозначим t_{1i} , на втором – t_{2i} . Закон распределения длин интервалов между двумя последовательными поступлениями заявок задан плотностью $f_1\ (t_T)$. Продолжительность обслуживания имеет плотность распределения $f_2\,(t_0)$.

Процедура решения задачи имеет вид:

1. Генерируем равноправно распределённые псевдослучайные числа ς_i на отрезке *[0;1]*.

2. Преобразуем их в псевдослучайные числа с заданным законом распределения.

Определяют реализацию случайного интервала времени (Δt_{Ti}) между поступлениями заявок в систему.

3. Вычисляют момент поступления заявки на обслуживание: $t_i=t_{i-1}+\Delta t_{Ti}$.

4. Сравнивают момент окончания обслуживания предшествующих заявок на первом $t_{1(i-1)}$ и втором $t_{2(i-1)}$ сервисах.

5. Сравнивают момент поступления заявки t_i с минимальным моментом окончания обслуживания (например, $t_{1(i-1)}< t_{2(i-1)}$):

1) если $[t_i-t_{1(i-1)}]<0$, то заявка получает отказ, и вырабатывают новый момент поступления заявки описанным способом;

2) если $[t_i-t_{1(i-1)}]\geq 0$, то происходит обслуживание.

6. При выполнении условия 5.1 определяют время обслуживания i– ой заявки на первом сервисе Δt_{i1} путем преобразования случайной величины ς_i в величину с заданным законом распределения.

7. Вычисляют момент окончания обслуживания i– ой заявки на первом сервисе $t_{i1} = [t_{1(i-1)}+ \Delta t_{i1}]$.

8. Устанавливают новый момент поступления заявки, и вычислительная процедура повторяется.

9. В ходе моделирования СМО накапливаются статистические данные о процессе обслуживания.

10. Определяют показатели качества функционирования системы путём обработки накопленных результатов моделирования методами математической статистики.

В качестве основных критериев эффективности функционирования СМО могут выступать такие характеристики:

вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки;

вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки;

относительная и абсолютная пропускная способность системы;

средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;

среднее время ожидания в очереди;

средняя длина очереди;

средний доход от функционирования системы в единицу времени и т.д.

Элементы дискретного моделирования

В дискретных имитационных моделях основной независимой переменной является время. Другие переменные являются функциями времени, т.е. зависимыми переменными.

При дискретной имитации зависимые переменные изменяются дискретно в определенные моменты имитационного времени, называемые моментами свершения событий.

При имитационном моделировании системы массового обслуживания зависимыми переменными будут состояние обслуживающего узла и число клиентов, находящихся в очереди. Моменты свершения событий соответствуют моментам времени, когда заявка прибывает в систему и покидает по завершении обслуживания. В дискретных моделях значения зависимых переменных не изменяются в промежутках между моментами свершения событий.

Целью дискретного имитационного моделирования является воспроизведение взаимодействий, поведения и функциональных возможностей исследуемой системы, в которых участвуют компоненты системы. Для этого выделяются состояния системы и описываются действия, которые переводят ее из одного состояния в другое.

Функционирование дискретной имитационной модели можно задать таким образом:

- определить изменение состояния системы в момент свершения события;
- описать действия, в которых принимают участие элементы системы;
- описать процесс, через который проходят элементы системы.

Под процессом будем понимать ориентированную во времени последовательность событий и действий.

В примере с системой массового обслуживания в определенные моменты времени имеем события:

1. «прибытие»;

2. «начало обслуживания»;

3. «конец обслуживания».

Действие: функционирование системы между двумя событиями «начало обслуживания» и «конец обслуживания».

Процесс: совокупность всех событий («прибытие», «начало обслуживания», «конец обслуживания») и действие, состоящее в обслуживании заявки.

При дискретной имитации имеют место три альтернативных подхода:

- событийный;
- сканирования активностей;
- процессно-ориентированный.

1. Событийный подход

При событийном подходе система моделируется путем описания событий, которые могут изменить состояние системы, определении логических взаимосвязей между ними. Имитация работы системы осуществляется путем выполнения упорядоченной во времени последовательности логически взаимосвязанных событий.

Рассмотрим пример. Работает система массового обслуживания с одним обслуживающим узлом. В такой системе имеет место процесс: заявка поступает в систему, затем после возможного пребывания в очереди обслуживается и покидает систему. Состояние системы определяется состоянием обслуживающего узла («занят», «свободен») и числом заявок в очереди. Изменения состояния системы могут происходить только в моменты прибытия и окончания обслуживания заявок. Эти события полностью описывают динамику системы.

Логика события «прибытие» имеет вид:

если узел занят, то поступившая заявка присоединяется к очереди, которая увеличивается на 1 единицу, в противном случае перевод узла в состояние «занят», далее планируется следующее прибытие;

если узел свободен, то поступившая заявка обслуживается, а узел переводится в состояние «занят»; планируется событие «окончание обслуживания» в момент времени = текущее время + время обслуживания; далее планируется следующее прибытие.

На первом шаге планируется прибытие следующего клиента, что в ходе имитации при неоднократном обращении к этой процедуре позволяет организовать непрерывный поток прибытий. Поведение прибывшей заявки зависит от состояния системы в текущий момент времени. Если узел занят, то прибывшая заявка присоединяется к очереди, а состояние системы изменяется, так как очередь увеличивается на единицу. Если узел свободен, то прибывшая в систему заявка сразу обслуживается, а состояние системы меняется, так как узел переходит в состояние «занят». Необходимо также запланировать событие «конец обслуживания» для данной заявки в момент времени, равный текущее время + время обслуживания.

Рассмотрим логику события «окончание обслуживания»:

если длина очереди положительна, то число заявок в системе = длина очереди +1; планируется окончание обслуживания в момент времени, равный текущему времени + время обслуживания; далее планируется следующее событие;

если длина очереди равна нулю, то узел переводится в состояние «свободен».

Когда узел заканчивает обслуживание очередной заявки, то далее надо проверить, есть ли заявки в очереди. Если есть, то их число уменьшается на единицу и планируется событие «конец обслуживания» первой заявки очереди. В противном случае узел переводится в состояние «свободен».

При имитации работы системы массового обслуживания с одним обслуживающим узлом на основе событийного подхода необходимо воспроизвести хронологию (календарь) событий и причины их появления в соответствующие моменты имитационного времени. Календарь событий первоначально содержит отметку только о первом прибытии. В ходе имитации возникновение других событий «прибытие» и «конец обслуживания» планируется в календаре в соответствии с логикой функционирования системы. События выполняются в упорядоченной во времени последовательности, при этом имитационное время продвигается от одного события к другому.

2. Подход сканирования активностей

При таком подходе описываются действия, в которых принимают участие элементы системы, задаются условия, определяющие начало и окончание этих действий. События, которые начинают или завершают действие, не планируются, а определяются по условиям для данного действия. Условия начала и конца действия проверяются после очередного продвижения имитационного времени. Если заданные условия удовлетворяются, то происходит соответствующее действие. Для того, чтобы было выполнено каждое действие в модели, сканирование условий производится для всего множества действий при каждом продвижении имитационного времени.

Подход сканирования активностей обеспечивает простую схему моделирования для решения целого ряда проблем. Он наиболее эффективен для случаев, в которых продолжительность действия определяется в зависимости от того, насколько состояние системы удовлетворяет заданным условиям. Подход сканирования активностей менее эффективен по сравнению с событийным подходом, так как для каждого действия необходимо сканировать условия.

3. Процессно-ориентированный подход

Многие имитационные модели содержат последовательности компонентов, которые возникают в них по определенной схеме, например, очередь, в которой заявки ожидают обслуживания. Логика возникновения различных компонентов может быть обобщена и описана по одной схеме. Например, для системы массового обслуживания с одним узлом имеем:

фиксировать прибывающих клиентов через каждые *T* единиц имитационного времени;

ожидать обслуживания;

продвинуть время на продолжительность обслуживания;

освободить узел;

удалить клиента.

Сначала генерируется входной поток клиентов через каждые *T* единиц имитационного времени. Величина *T* может быть константой или принимать случайные значения. «Ожидать обслуживания» определяет, что клиент ожидает до тех пор, пока узел не освободится. Это аналогично понятию действия по условию, применяемого в подходе сканирования активностей. «Продвинуть время» моделирует тот период времени, в течение которого клиент обслуживался узлом. Это аналогично планированию в событийном подходе. В календарь событий помещается метка о том, что обслуживание клиента будет завершено в момент, равный текущему имитационному времени + время обслуживания. После завершения обслуживания клиент покидает систему и узел освобождается. Освобождение узла позволяет сразу же приступить к обслуживанию ожидающего клиента.

Процессно-ориентированный подход сочетает в себе событийный подход и подход сканирования активностей. Он обеспечивает описание прохождения компонентов системы через процесс, содержащий ресурсы. Этот подход является менее гибким, чем событийный, так как требуется постоянный анализ состояния ресурсов после их использования.

Обобщенная модель управления запасами

Каждое предприятие имеет различные стратегические запасы определенных ресурсов: сырье, комплектующие изделия, готовая продукция и прочие ресурсы.

Совокупность таких материалов, временно не используемых, называют запасами предприятия.

Запасы создаются для непрерывности производства, так как при дефиците ресурсов предприятие несет издержки из-за простоев, невыполнения договорных обязательств и пр.

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать определенный уровень запасов ресурсов, предметов потребления для обеспечения спроса. Спрос можно удовлетворить путем однократного создания запаса для рассматриваемого периода времени или для каждой единицы рассматриваемого периода времени.

Задачи управления запасами обладают особенностями. С увеличением запасов увеличиваются расходы на их хранение, но уменьшаются издержки, но уменьшаются издержки из-за возможного дефицита их. Одна из задач управления запасами заключается в определении такого уровня запасов, который минимизирует сумму ожидаемых затрат по хранению запасов, а также потерь от дефицита их.

Всякая модель управления запасами должна дать ответ на два вопроса:

1. Какое количество продукции заказывать для пополнения запасов?

2. Когда делать заказ на пополнение запасов продукции?

В первом случае ответ на вопрос зависит от размера заказа, который определяет оптимальный объем ресурсов, необходимых для пополнения запасов, размер заказа может зависеть от типа системы управления запасами. Различают два типа таких систем:

1. *Системы управления запасами с периодическим пополнением запасов.* В этом случае запасы пополняются через равные промежутки времени (еженедельно, ежеквартально и т.п.).

2. *Системы с непрерывным контролем уровня запасов*. В этом случае состояние запасов постоянно контролируется и как только уровень их достигает некоторого значения, делается заказ на пополнение запасов (точка заказа).

Размер заказа и точка заказа обычно определяются из условий минимизации суммарных затрат системы управления запасами.

Обобщенную модель управления запасами построить невозможно из-за большого разнообразия таких систем, но можно в общем виде представит функцию суммарных затрат:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4,$$

где

F – функция суммарных затрат;

F_1 – затраты, связанные с приобретением запасов;

F_2 – затраты, связанные с оформлением заказов на пополнение запасов (организационные затраты);

F_3 – затраты, связанные с хранением запасов;

F_4 – потери от дефицита или избыточных запасов ресурсов.

При постановке задачи следует учитывать, что в функции суммарных затрат не обязательно должны быть все слагаемые. Некоторые из них могут оказаться несущественными или их трудно оценить, например, трудно оценивать потери от дефицита.

Тип модели управления запасами, в основном, зависит от характера спроса. Спрос можно классифицировать так:

1. *Детерминированный* (достоверно известен) и может быть *статическим* или *динамическим*. Статический спрос имеет место в том случае, когда интенсивность потребления не зависит от времени, в противном случае спрос динамический.

2. *Вероятностный спрос.* Вероятностный спрос задается функцией распределения или плотностью вероятности. Вероятностный спрос может быть *стационарным*, если функция плотности не зависит от времени, в противном случае *нестационарным.*

На тип модели управления запасами влияют и другие факторы:

1) запаздывание поставок;

2) пополнение запасов;

3) период времени, в течение которого осуществляется регулирование уровня запасов;

4) число пунктов накопления запасов (несколько складов или один);

5) число видов продукции, хранящейся на складе и некоторые другие факторы.

Статические модели управления запасами

1. Однопродуктовая детерминированная модель

Построим простейшую модель управления запасами.

Примем допущения:

- цена единицы продукции фиксирована;
- спрос постоянен во времени;
- запасы пополняются мгновенно;
- дефицит отсутствует.

Введем обозначения:

y – размер (объем) заказа (ед. продукции);

β - интенсивность спроса (измеряется в ед. продукции в ед. времени);

K- затраты на оформление, связанные с размещением одного заказа;

h – удельные затраты на хранение (затраты на единицу складируемой продукции в ед. времени);

t_0 – продолжительность цикла заказа (ед. времени).

Заказ объема y (ед. продукции) размещается и пополняется мгновенно, когда уровень запаса равен нулю. Затем запас равномерно расходуется с постоянной интенсивностью β. Продолжительность цикла заказа $t_0 = y/\beta$ (ед. времени).

Суммарные затраты в единицу времени *F(y)* можно представить в виде суммы затрат на оформление заказа в единицу времени и затрат на хранение запаса в единицу времени, т.е.

$$F(y) = \frac{K\beta}{y} + h \cdot \frac{y}{2},$$

где *y/2* – средний уровень запасов. Найдем минимум функции *F(y),* для этого найдем критические точки функции:

$F'(y) = -K\beta/y^2 + h/2$, $F'(y) = 0$,

следовательно, $y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ - критическая точка, исследуем ее на экстремум с помощью 2-го достаточного условия существования экстремума, для этого вычислим вторую производную функции удельных затрат:

$F''(y) = 2K\beta/y^3$,

$F''(y)>0$, т.к. размер заказа $y>0$, следовательно,

$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ - точка минимума.

Полученная формула оптимального размера заказа называется формулой экономичного размера заказа или формулой Уилсона (Wilson).

2. Однопродуктовая детерминированная модель с разрывами цен

Модифицируем построенную модель на тот случай, когда предоставляются скидки на цену продукции следующим образом. Если объем заказа *y* превышает некоторый фиксированный уровень *q*, тогда стоимость единицы продукции *c*:

c1, если $y \le q$,

c2, если $y>q$, $c1>c2$.

В этом случае будем иметь две функции удельных затрат, которые отличаются друг от друга одним слагаемым – затратами на приобретение запасов:

$F1(y)=\beta \cdot c1+\frac{K\beta}{y}+\frac{h}{2}y$, при $y \le q$

$F2(y)=\beta \cdot c2+\frac{K\beta}{y}+\frac{h}{2}y$, при $y>q$.

Эти функции имеют одну точку минимума:

$$y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}.$$

Определение оптимального размера заказа y^* зависит от того, где находится точка разрыва цены q по отношению к зонам 1, 2, 3, на которые делится ось абцисс (запасы) точками y_m и Q. Величина Q находится из уравнения:

$F1(y_m) = F2(Q)$,

тогда оптимальное решение y^*:

$y^* = y_m$, если $q \in 1,3$ зонам;

$y^* = q$, если $q \in 2$ зоне.

3. Однопродуктовая модель производственных запасов

В этом случае предположим, что готовые товары поступают на склад непрерывно непосредственно с производственной линии. Такую модель называют моделью производственных поставок. Пусть p – скорость поступающего товара на склад, эта величина равна количеству товара, выпускаемого производственной линией в единицу времени. Остальные обозначения и допущения такие же, как и в модели 1.

Определим оптимальный размер партии, минимизирующий общие удельные затраты. Максимальный уровень запасов в момент времени t:

$RT = (p - y)t$, $y = pt$ – количество товаров в одной производственной поставке.

Тогда средний уровень запасов составляет половину максимального уровня:

$$\frac{(p-\beta)y}{2p}.$$

И функция общих удельных затрат имеет вид:

$$F(y) = \frac{K\beta}{y} + \frac{(p-\beta)yh}{2p}.$$

Точкой минимума этой функции будет точка:

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta p}{(p-\beta)h}}.$$

4. Многопродуктовая детерминированная модель с ограничением на площадь складского помещения

Пусть на складе хранится n *(*$n>1$*)* видов продукции. Площадь складского помещения ограничена величиной A.

Примем допущения:

- цена каждого вида продукции фиксирована;

- спрос на продукцию каждого вида постоянен во времени;

- запасы всех видов продукции пополняются мгновенно;

- дефицит для всех видов продукции отсутствует.

Введем обозначения:

y_i – размер заказа на продукцию i-го вида, $i=1,2,\ldots,n$;

β_i – интенсивность спроса на продукцию i-го вида;

K_i – затраты, связанные с оформлением одного заказа на продукцию i-го вида;

h_i - затраты, связанные с хранением единицы продукции i-го вида в ед. времени;

a_i – площадь, необходимая для хранения одной единицы продукции i-го вида.

Поставим задачу минимизации функции суммарных удельных затрат при ограничении на площадь складского помещения.

Пусть функция $F_i(y_i)$ определяет затраты на продукцию i-го вида, они построены по аналогии с функцией удельных затрат для однопродуктовой модели:

$F_i(y_i)=K_i\,\beta_i/y_i+hy_i/2,$

Тогда общие удельные затраты будут иметь вид:Место для формулы.

$F(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\sum_{i=1}^{n} F(y_i).$

Минимизируем эту функцию при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\ y_i\ \le A,$$

$$\forall\, y_i\ > 0.$$

Поставленная задача – задача нахождения условного экстремума функции нескольких переменных. Она решается методом множителей Лагранжа, для этого построим функцию Лагранжа:

$$L(l, y_1, y_2, \ldots, y_n) = F(y_1, y_2, \ldots, y_n) - l\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\ y_i - A\right),$$

где $l<0$, l – множитель Лагранжа, l – const.

Найдем все стационарные точки функции Лагранжа.

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \sum_{i=1}^{n} a_i\ y_i - A, \quad (1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_i}{y_i}\,\beta_i + \frac{h_i}{2} - l\,a_i = 0,\ i=1,2,\ldots,n, \quad (2).$$

Уравнение (1) ничего не дает для решения задачи, а лишь указывает на то, что ограничения выполняются. Решение уравнений системы (2) дает:

$$y_i^* = \sqrt{2K_i\,\beta_i\,/\,(h_i - 2\,l^*\,a_i)},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, найдена стационарная точка функции Лагранжа $M_l^*(l^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$. Можно показать, что выполняются достаточные условия теоремы Куна-Таккера, и точка M_l^* является точкой минимума функции Лагранжа, а, следовательно, соответствующая точка $M^*(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ – точка минимума функции удельных суммарных затрат. Оптимальное значение множителя Лагранжа l^* находится численными методами.

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ: ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Понятие системы. Классификация систем.
2. Системный анализ, его сущность.
3. Методы решения задач качественного и количественного описания данных системы.
4. Этапы системного анализа.
5. Основные понятия теории графов.
6. Приведите примеры простейших задач оптимизации.
7. Методы одномерной оптимизации.
8. Понятия о методах поиска экстремума функции.
9. Какие методы решения оптимизационных задач Вам известны?
10. Опишите экономический смысл целевой функции и ограничений Вашей оптимизационной модели.
11. Дайте основные понятия теории графов (сетей).
12. Какие задачи целесообразно решать с использованием теории графов.
13. Дайте определение минимального дерева-остова.
14. Приведите алгоритм нахождения минимального дерева-остова.
15. Приведите алгоритм нахождения кратчайшего пути на сети без циклов.
16. Нахождение оптимального решения в однопродуктовой детерминированной модели управления запасами.
17. Нахождение оптимального решения в однопродуктовой модели управления запасами с разрывами цен.
18. Нахождение оптимального решения в многопродуктовой модели управления запасами.
19. Какие проблемы можно решить с помощью теории массового обслуживания?
20. Перечислите типичные особенности задач массового обслуживания.
21. Определите компоненты системы массового обслуживания.
22. Дайте определение процессов «чистого рождения», «чистой гибели».

23. Какова роль пуассоновского и экспоненциального распределений в теории массового обслуживания?

24. Для каких целей предназначена символика Кэндалла-Ли?

25. В каком режиме может функционировать система массового обслуживания и каким параметром ее режим описывается?

26. Перечислите основные операционные характеристики систем массового обслуживания? Как они между собой взаимосвязаны?

27. Приведите простейшую модель массового обслуживания и формулы для определения основных операционных характеристик.

28. Классификация условий принятия решений.

29. Принятие решений в детерминированных условиях.

30. Функция полезности, ее свойства.

31. Основные понятия, связанные с задачей потребительского выбора.

32. Критерий ожидаемого значения.

33. Критерий комбинации ожидаемого значения и дисперсии.

34. Классификация условий неопределенности.

35. Критерий Лапласа.

36. Критерий Вальда.

37. Критерий Сэвиджа.

Теория игр в принятии решений при наличии разумного противника.

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ: ЗАДАНИЯ К ЗАЧЕТУ

1. Дана матрица прямых материальных затрат A и вектор конечного спроса C. Найти объем выпуска продукции 2-ой отрасли с точностью до 0.01.

A=$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$.

2. Найти объем выпуска продукции 1-ой отрасли, необходимый для выпуска 1 ед. готовой продукции 1-ой отрасли, если матрица прямых материальных затрат

A=$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Ответ дать с точностью до 0.01.

3. Найти конечный спрос на продукцию 2-ой отрасли, если матрица прямых материальных затрат А и вектор выпуска продукции X заданы. A=$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Ответ дать с точностью до 0.01.

4. Найти конечный спрос на продукцию 2-ой отрасли, если матрица прямых материальных затрат А и вектор выпуска продукции X заданы. A=$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} 30 \\ 170 \end{pmatrix}$.

Ответ дать с точностью до 0.01.

5. В результате решения оптимизационной балансовой задачи получено

оптимальное решение X_{opt}=$\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix}$. Запасы дополнительных ресурсов заданы вектором r=$\begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix}$, также известна нормативная матрица затрат дополнительных ресурсов D=$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$. Определить остаток 1-го дополнительного ресурса.

6. В результате решения оптимизационной балансовой задачи получено

оптимальное решение X_{opt}=$\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$. Задана матрица прямых материальных затрат A=$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$. Определить оптимальный конечный спрос на продукцию 1-ой отрасли.

7. Среднее число клиентов банка, прибывающих в банк за 1 мин. Равно 3. Найти вероятность того, что за 3 дня в страховую компанию прибудет 7 клиентов. Ответ дать с точностью до 0.001.

8. Магазин с одним продавцом. Поток покупателей простейший, поступает с интенсивностью 20 чел./час. Время обслуживания заявки –

случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному распределению с параметром μ=25 чел./час. Определить среднее время пребывания покупателя в очереди. Ответ дать с точностью до 0.01.

9. Магазин с одним продавцом. Поток покупателей простейший, его интенсивность 10 чел./час. Время обслуживания покупателя – случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному распределению с параметром μ=15 чел./час. Определить среднее число покупателей в магазине.

10. Автозаправочная станция имеет одну бензоколонку. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью 11 авт./час. Время обслуживания = случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону с параметром μ=14 авт./ час. Определить среднее время ожидания обслуживания. Ответ дать с точностью до 0.01.

11. Случайная величина X распределена экспоненциально, ее плотность распределения вероятностей имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 10e^{-10x}, \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание случайной величины X.

12. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин., равно 2. Найти вероятность того, что за 2 минуты прибудет 3 самолета. Поток самолетов простейший. Ответ дать с точностью до 0.001.

13. Предприятию по строительству судов требуется 20000 заклепок в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 0.5 тыс. ден. ед. за партию, цена одной заклепки – 10 ден. ед. Издержки на хранение одной заклепки оценены в 12.5 % ее стоимости. Найти оптимальный размер поставки.

14. В системе управления запасами запасы пополняются мгновенно, дефицит отсутствует, цена продукции фиксирована. Каждый год с постоянной интенсивностью поступает спрос 15000 ед. товара, издержки за организацию

поставки составляют 10 ден. ед. на партию, цена единицы товара – 30 ден. ед., а издержки на ее хранение – 7.5 ден. ед. в год. Найти оптимальный размер партии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фетисов, В. Г., Филиппенко, В. И. Качественные и количественные методы системного анализа: моногр. / Шахты: ЮРГУЭС, 2011
2. Фетисов, В. Г., Филиппенко, В. И. Теория систем и системный анализ: учеб. пособие для студентов 1 курса бакалавриата напр. 230400 "Информ. системы и технологии", 230700 "Прикладная информатика" дневной и заоч. форм. обучения / Шахты: ЮРГУЭС, 2012
3. Фетисов, В. Г., Охрименко, О. И. Избранные вопросы теории систем и системного анализа с приложениями: моногр. / Шахты: ИСОиП (филиал) ДГТУ в г. Шахты, 2014
4. Теория систем и системный анализ: учеб.-метод. комплекс дисциплины (УМКД) для студентов 1 курса МРТФ, ЗФ, ФДО напр. подготовки бакалавров 230400.62 "Информационные системы и технологии", 230700.62 "Прикладная информатика" / Шахты: ЮРГУЭС, 2012